

JAK PRACOWAĆ NA LEKCJACH MATEMATYKI W ATMOSFERZE SPRZYJAJĄCEJ UCZENIU SIĘ? UCZENIE SIĘ WE WSPÓŁPRACY



Wzorcowy materiał szkoleniowy w zakresie innowacyjnych rozwiązań organizacyjno-dydaktycznych dla nauczycieli i studentów studiów pedagogicznych

Matematyka w klasach IV-VIII szkoły podstawowej

Justyna Prud



Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój



**Rzeczpospolita
Polska**

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



Autorka:

Justyna Prud

Recenzentka:

Ewa Ludwikowska

Wydawca:

Euro Innowacje sp. z o.o.

Publikacja została opracowana w ramach projektu pt. „Szkoła Ćwiczeń w gminie Barcin”, realizowanego w partnerstwie przez Gminę Barcin (Beneficjent projektu) oraz Euro Innowacje sp. z o.o. (Partner projektu).

Projekt jest finansowany ze środków budżetu państwa oraz Unii Europejskiej, w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój (PO WER), II Osi Priorytetowej „Efektywne polityki publiczne dla rynku pracy, gospodarki i edukacji”, Działania 2.10 „Wysokiej jakości system oświaty”.

Publikacja jest udostępniona na zasadach wolnej licencji Creative Commons – Uznanie autorstwa 3.0 Polska (CC BY 3.0 PL).



Fundusze Europejskie
Wiedza Edukacja Rozwój



**Rzeczpospolita
Polska**

Unia Europejska
Europejski Fundusz Społeczny



SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
CEL PUBLIKACJI	6
1. W GRUPIE LEPIEJ	7
1.1 Liczebność i sposoby podziału na grupy.....	8
1.2 Prezentacja wyników, informacja zwrotna i ocena	11
1.3 Grupa w praktyce.....	15
1.3.1 Zadania „narysuj” a stanie się łatwe	16
1.3.2 Zadania na dowodzenie	19
1.3.3 Ile matematyki jest w lesie?.....	23
2. NAUKA PRZEZ DOŚWIADCZENIE.....	24
2.1 Przygotowanie doświadczeń/eksperymentów	26
2.2 Eksperyment w praktyce.....	27
2.2.1 Ludolfina. Wyznaczanie wartości liczby π	27
2.2.2 Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta	29
2.2.3 Symetrie - budowanie figur środkowo i osiowoosymetrycznych	31
2.2.4 Twierdzenie Pitagorasa w praktyce	34
2.2.5 Szukanie regularności	35
3. NAUKA PRZEZ ZABAWĘ – GRYWALIZACJA	38
3.1 Emocje, zasady, ocenianie	39
3.2 Gra dydaktyczna w praktyce.....	41
3.2.1 Gra na kartach: Bank w Biglandii	41
3.2.2 Cztery iloczyny w linii [modyfikacja za NCTM, 2008].....	44
3.2.3 Zgadnij ile [modyfikacja za Candler, L.].....	46
3.2.4 Ułamki – więcej niż połowa	47
3.2.5 Odliczanie.....	49
3.2.6 Gra planszowa – liczby całkowite i wymierne	50
3.2.7 Bingo matematyczne – dodawanie jednomianów [Świercz, 2019].....	51
3.2.8 Gry planszowe dostępne na rynku	53
PODSUMOWANIE	56
BIBLIOGRAFIA Z UWZGLĘDNIENIEM NETOGRAFII.....	67

WYKAZ ZAŁĄCZNIKÓW	69
WYKAZ TABEL	69
WYKAZ ILUSTRACJI.....	70



WSTĘP

Jaki model nauczania byłby dobrą drogą na rozwijanie kompetencji matematycznych uczniów w XXI wieku? Jak przygotować nastolatki do egzaminu ósmoklasisty, nauki na wyższym poziomie edukacji, wyboru zawodu, dorosłego życia i wciąż zmieniającego się świata? Zadaniem szkoły podstawowej jest zapewnienie bezpiecznych warunków oraz przyjaznej atmosfery do nauki, uwzględniającej indywidualne możliwości i potrzeby edukacyjne ucznia oraz dbałość o integralny rozwój biologiczny, poznawczy, emocjonalny, społeczny i moralny ucznia [Podstawa programowa, 2017, s. 5-7]. Wskazane jest także, aby szkoła wyposażała absolwenta w umiejętności ponad przedmiotowe, które umożliwią mu odnalezienie się na rynku pracy takie jak: otwartość na współpracę w zespole, umiejętność efektywnego porozumiewania się, asertywność i poszanowanie drugiego człowieka, zdolność do podejmowania decyzji, kreatywne rozwiązywanie problemów, empatię i zaufanie, odporność na stres, planowanie i osiągnięcie celów [Koszewska, 2018] oraz szybka adaptacja do nowych warunków poprzez łatwość nabywania wiedzy i umiejętności. Niestety ponad roczne doświadczenie nauki zdalnej pozostawiło ślady w emocjach i relacjach. Wg badań przeprowadzonych przez Uniwersytet Gdański 1/3 z nastolatków odczuwa smutek, samotność oraz przygnębienie, a ponad połowa uważa, że ich relacje rówieśnicze w klasie przed pandemią były lepsze [Ptaszek, 2020, s.10]. Aby kształcić kluczowe w procesie uczenia się kompetencje należałoby najpierw odbudować relacje w grupie rówieśniczej oraz zbudować je między uczniem a nauczycielem. Podjąć próbę rezygnacji z przekazywania wiedzy na rzecz stawiania przed uczniami wyzwań, stwarzania możliwości do dyskusji, współdziałania, odkrywania, konstruowania i praktykowania. Wspólne rozwiązywanie problemów przez uczenie się w grupach, eksperymentowanie i gry spowoduje rozwój niezbędnych na rynku pracy kompetencji społecznych, a przy okazji uczniowie zrozumieją i ... może polubią matematykę.

Autorka



CEL PUBLIKACJI

Publikacja ma być źródłem inspiracji do wdrażania innowacyjnych rozwiązań organizacyjno-dydaktycznych dla potrzeb rozwijania kompetencji kluczowych dla nauczycieli matematyki klas IV – VIII szkoły podstawowej oraz studentów kierunków pedagogicznych jak uczyć lub uczyć się w grupie, jak uczyć przez doświadczanie oraz jak uczyć przez zabawę.



1. W GRUPIE LEPIEJ

Jaką strategię działania powinien przyjąć nauczyciel, aby jego podopieczni uczyli się chętniej, szybciej, efektywniej? Jak powinien zaplanować lekcję, aby uczniowie wynieśli z niej jak najwięcej korzyści? To przecież on zakłada cele do zrealizowania, przebieg swoich i uczniowskich czynności, dobiera metody, formy i treści nauczania, które będą obszarem pracy uczniów.

Czym jest grupa w sensie edukacyjnym?

Grupa: jest zbiorem jednostek połączonych ze sobą więzią psychiczną, podporządkowanych wspólnym celom i zdolnych do wspólnego działania. Grupa to nie suma jednostek, lecz zupełnie nowa jakość, gdyż z chwilą znalezienia się w niej poszczególne jednostki mogą zmienić swój sposób bycia i zachować się tak, jak nigdy nie zachowałyby się będąc same (Vasta i in., 1995, s.596).

Dzieci bawią się, uczą się, uprawiają sport w mniej lub bardziej licznych grupach.

W życiu dorośli również pracują w zespole ludzi w biurze, projekcie, szkolnej radzie rodziców, partii politycznej pełniąc w nich różne role społeczne.

Zatem współdziałanie jest istotną częścią ludzkiego funkcjonowania. Profesor

John Hattie z Auckland University of New Zeland w książce „Visible learning.

A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement” przedstawił wyniki piętnastoletnich badań dotyczących wpływu różnych czynników na efekty nauczania. Z opracowania wynika, że znaczący wpływ na osiągnięcia uczniowskie mają: informacja zwrotna (rozmiar wpływu - 0,73), pozytywne relacje nauczyciel-uczeń (0,72), cele będące wyzwaniem (0,56) wpływ rówieśników (0,53) oraz uczenie się w małych grupach (0,49) [Hattie, 2008]. Wszystkie te komponenty można uwzględnić podczas dobrze przygotowanej pracy zespołowej.

Uczniowie w małej grupie motywują się do pracy nawzajem, czują się odpowiedzialni za efekty pracy, chcą dobrze się zaprezentować przed innymi ekipami. Praca w gronie rówieśników daje im nie tylko szansę skorzystania z pomocy, ale poprzez możliwość skonfrontowania swoich pomysłów zapewnia, szczególnie słabszym uczniom, poczucie bezpieczeństwa. Pozwala to



skoncentrować się na uczeniu się, a w efekcie uzyskiwanie coraz lepszych wyników w nauce. Zmienia się również rola nauczyciela, który w procesie uczenia przestaje być kierownikiem przekazującym wiedzę i oceniającym poczynania ucznia. Staje się on przewodnikiem-mentorem, czasem arbitrem, który służy doświadczeniem i daje uczniom możliwość samodzielnego dochodzenia do wiedzy.

1.1 Liczebność i sposoby podziału na grupy

Jaka jest optymalna wielkość grupy na lekcji matematyki?

Z mojej praktyki wynika, że najlepiej sprawdzają się pary lub grupy od 3 do 5 osób o zmiennym składzie. W zbyt licznym zespole trudno o kooperację. Nie każdy uczeń ma możliwość wyrażenia swojej opinii, podania propozycji. Trudno dyskutować, tłumaczyć, ustalać wspólne kryteria rozwiązalności zadania. Łatwiej też „schować się” w grupie i czekać, aż inni wykonają zadanie [Hattie i in., 2017, s. 155-158]

W jaki sposób dzielić uczniów na grupy?

Najmniej kontrowersji wśród nastolatków powoduje samodzielne dobieranie się. Ten sposób sprawdzi się w nowej klasie, w której uczniowie nie czują się pewnie, a nauczycielowi zależy na poznaniu relacji w grupie i zbudowaniu poczucia bezpieczeństwa. Jeżeli planujemy pracę zespołową tylko przez parę minut dobrym rozwiązaniem będzie podział automatyczny wg miejsca zajmowanego w sali lub listy z dziennika. Największy efekt edukacyjny daje jednak losowy sposób podziału poprzez odliczanie, wyciąganie piłeczek, patyczków, kart, kolorów czy numerów grup. Taki algorytm rozbicia na grupy wywołuje często opór ze strony nastolatków, które nie chcą pracować w danej grupie lub z określonymi osobami. Dlatego dobrze włączyć tę formę pracy na stałe, zmieniając za każdym razem skład grupy, aby uniknąć wykluczenia mniej popularnych uczniów. Tryb dobierania zespołów można nieco uatrakcyjnić wykorzystując bezpłatne narzędzia dostępne w Internecie. Wystarczy skopiować



z e-dziennika listę uczniów i wkleić ją do generatora dostępnego pod adresem:

<https://pickerwheel.com/tools/random-team-generator/> lub

<https://pl.rakko.tools/tools/59/>. Potem podać liczbę zespołów, uruchomić

losowanie i po kilku sekundach wyświetlić na tablicy listę grup.

Alternatywne możliwości dają płatne wersje platform do nauki zdalnej, które mają narzędzia do tworzenia osobnych pokoi (breakout rooms). Dzielą one wszystkich obecnych uczniów na zadaną liczbę grup i umożliwiają współpracę w zespołach podczas nauki zdalnej. Natomiast: <https://wylosowane.pl/> dają możliwość rozdzielenia klasy na grupy z opcją losowego wskazania lidera.

Wystarczy podać liczbę grup, wpisać imiona uczestników, wybrać opcję wskaź lidera i uruchomić losowanie.

Innym sposobem może być podział poprzez zadania tematyczne. Każdy uczeń losuje łatwe ćwiczenie i je rozwiązuje. Osoby z takim samym rozwiązaniem tworzą jeden zespół. Zadania podobne do zaproponowanych poniżej mogą być rozgrzewką, ale także wstępem do prawdziwej pracy w grupie.

Grupa 1 (rozwiązanie: liczba 1)

- a) Rozwiązanie równania $3x - 2 = 1$.
- b) Liczba dodatnia, która jest równa swojemu kwadratowi.
- c) Największy wspólny dzielnik liczb 15 i 34.

Grupa 2 (rozwiązanie: liczba 2)

- a) Najmniejsza liczba pierwsza.
- b) Liczba przekątnych prostokąta.
- c) Liczba kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Grupa 3 (rozwiązanie: liczba 3)

- a) Średnia arytmetyczna liczb 2,3,4.
- b) Obwód trójkąta równobocznego o boku długości 1.
- c) Liczba dzielników liczby 9.



Grupa 4 (rozwiązanie: liczba 4)

- a) Reszta z dzielenia liczby 9 przez 5.
- b) Liczba wierzchołków równoległoboku.
- c) Pole kwadratu o boku długości 2.

Grupa 5 (rozwiązanie: liczba 5)

- a) Liczba przekątnych pięciokąta.
- b) Pole trójkąta o wysokości 5 cm i podstawie 2 cm.
- c) Liczba wszystkich cyfr parzystych.

Zadania do podziału mogą dotyczyć także własności figur czy działań:

Grupa 1 (rozwiązanie: średnica)

- a) Jestem cięciwą o długości dwa razy większej niż promień.
- b) Jestem najdłuższą cięciwą.
- c) Jestem odcinkiem łączącym dwa punkty na okręgu i przechodzącym przez jego środek.

Grupa 2 (rozwiązanie: trójkąt)

- a) Jestem wielokątem o trzech kątach.
- b) Jestem wielokątem i suma moich kątów wewnętrznych jest równa 180° .
- c) Jestem wielokątem, który nie posiada przekątnych.

Grupa 3 (rozwiązanie: równoległobok)

- a) Jestem czworokątem, którego przekątne przecinają się w połowie.
- b) Mam dwie pary boków równych i równoległych.
- c) Każde moje dwa sąsiednie kąty wewnętrzne mają w sumie miarę 180° .

Do bardzo trudnych zadań np. na dowodzenie czy zbudowanie strategii nauczyciel może podzielić uczniów wg umiejętności matematycznych, np. zdolnych z średnio-uzdolnionymi, albo średnio-uzdolnionych i słabszych. Wówczas nie tylko najlepsi angażują się w rozwiązanie, ale pozostali również mają szansę przedyskutować, zrozumieć problem oraz znaleźć swój sposób uzasadnienia [Hattie i in., 2017, s. 155-158].



Do podziału według poziomu zaawansowania uczniów można wykorzystać narzędzie: <https://www.keamk.com/random-team-generator>. Nauczyciel dokonując podziału wprowadza liczbę grup, zaznacza, że dobiera podopiecznych pod względem umiejętności przedmiotowych, wpisuje ich imiona i określa poziom zaawansowania. Pewną niedogodność aplikacji stanowi jednak konieczność zalogowania się, by zapisać ustaloną listę uczniów.

1.2 Prezentacja wyników, informacja zwrotna i ocena

Każdy z zespołów powinien mieć szansę przedstawienia swojego rozwiązania na forum klasy. Prezentacji może dokonać cała grupa, wytypowany przez nią przedstawiciel lub uczeń wylosowany przez nauczyciela. Trzeba jednak pamiętać, że ostatnia forma nie może być dla młodzieży zaskoczeniem i we wstępnej fazie lekcji klasa powinna zostać poinformowana o sposobie raportowania wyników. Nauczyciel ma wówczas pewność, że wszyscy wychowankowie poczują się w jednakowym stopniu odpowiedzialni za wyniki zespołu, będą włączeni w pracę oraz uczenie się od siebie nawzajem. Zespół może również przygotować rozwiązanie w formie plakatu lub prezentacji, która zostanie udostępniona uczniom, rodzicom, czy innym nauczycielom.

Podczas pracy wspólnej kluczowe znaczenie ma informacja zwrotna (feedback), która włącza ucznia w proces jego uczenia się. Nauczyciel udzielając informacji:

- komunikuje, co uczniowie w grupie zrobili dobrze,
- pokazuje nad czym powinni popracować,
- wskazuje, jak powinni pracować,
- nakreśla kierunki dalszego rozwoju [Sterna, 2014, s.53].

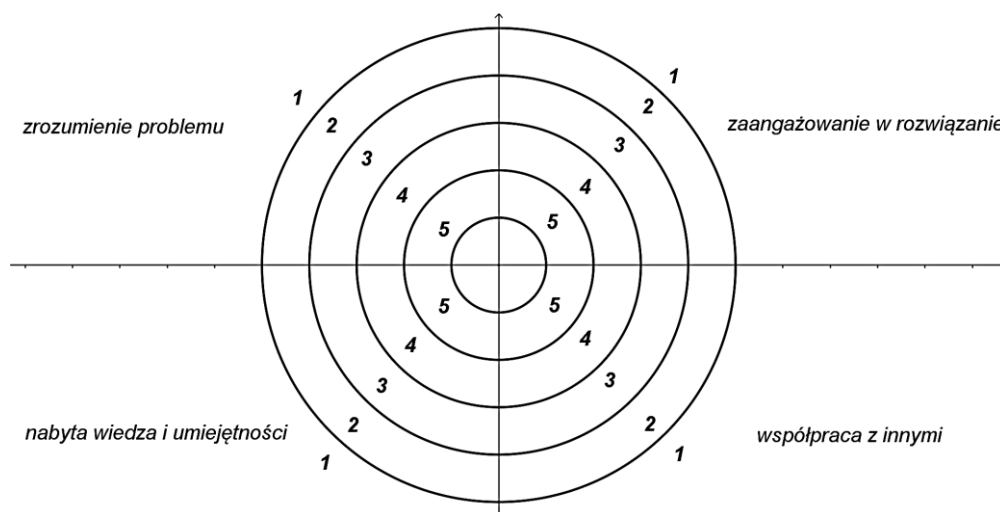


Pedagog monitorując postęp prac motywuje, studzi negatywne emocje i udziela wsparcia w procesie uczenia się. Naprowadza tak, aby grupa mogła pokonać trudności i rozwiązać problem. Informacji nauczyciel może udzielać ustnie lub pisemnie. Może również przygotować uczniowi plansze do udzielania informacji zwrotnej w postaci kart samooceny np. takich jak zaproponowane poniżej.

Tarcza strzelnicza [Kierstein, 2006, s. 11]

Tarczę podobną do strzelniczej należy podzielić na 4 obszary np. zrozumienie problemu, nabyta wiedza i umiejętności, zaangażowanie w rozwiązanie, współpraca z innymi. Każdy uczeń na swojej tarczy zaznacza punkt lub strzałkę w miejscu, w którym się ocenia. Na zebranie informacji od uczniów wystarczą 2 minuty.

Ilustracja 1 Informacja zwrotna – tarcza strzelnicza



Źródło: opracowanie własne



Ręka [Ciężka, 2019]

Uczeń odrysowuje na kartce swoją dłoń. Na palcach zapisuje odpowiedzi na pytania:

Ilustracja 2 Informacja zwrotna – ręka



Kciuk

Czego się dzisiaj nauczyłem?

Palec wskazujący

Nad czym muszę popracować?

Palec środkowy

Jak oceniam współpracę w grupie?

Palec serdeczny

W czym pomogłem lub pomogli mi inne osoby?

Mały palec

Co było dla mnie najłatwiejsze?

Źródło: opracowanie własne

Pytania????

W celu uzyskania informacji zwrotnej można również przeprowadzić ankietę lub dyskusję z wykorzystaniem następujących pytań.

1. Jak oceniasz współpracę w grupie w skali 1-10, gdzie 1 oznacza źle, a 10 - bardzo dobrze?
2. Czy wszyscy członkowie grupy byli zaangażowani w rozwiązywanie zadań?
3. Co sprawiło Ci największy problem?
4. Co zapamiętasz z dzisiejszej lekcji?
5. Nad czym powinieneś popracować?
6. Jaką wiedzę podzieliłeś się z innymi?
7. Czy inne osoby udzieliły Ci pomocy?
8. Jaką radę dałbyś innym uczniom, którzy będą uczyć się tego tematu?
9. Gdybyś mógł zacząć tą lekcję jeszcze raz, co zrobiłbyś inaczej?

[Hattie i in., 2017, s.188]



Jak dokonać rzetelnej oceny efektów aktywności grup, adekwatnie do osiągniętych postępów i wkładu pracy? Przede wszystkim wychowankowie muszą znać cele lekcji i kryteria oceny przed rozpoczęciem pracy. Wystawiając noty za pracę zespołową nauczyciel dokonuje oceny procesu uczenia się i powinien nagrodzić uczniów zgodnie z wkładem ich pracy. Jedna osoba z grupy lepiej sprawdzi się przygotowując ilustrację graficzną, inna będzie pełnić rolę lidera, a jeszcze inna skrupulatnie sprawdzi rozwiązanie, czy zaprezentuje efekty. Aby zobiektywizować ocenę można zaproponować klasie wystawienie oceny koleżeńskiej. Najłatwiej przygotować tabelę, w której zostaną wspólnie zapisane kryteria wg których uczniowie będą się oceniać. Mogą to być:

- zaangażowanie w pracę grupy,
- współpraca z innymi,
- dzielenie się wiedzą i umiejętnościami,
- nabyta wiedza i umiejętności,
- poprawna metoda rozwiązania,
- poprawne obliczenia,
- estetycznie wykonane rysunki,
- zrozumiały sposób przekazu rozwiązania.

Każdy z uczniów w grupie przyznaje punkty kolegom, na końcu nauczyciel sumuje wystawione noty i na ich podstawie stawia ocenę.

Z perspektywy nauczyciela bardzo istotna jest informacja zwrotna od uczniów, która dotyczy współpracy w grupie, poziomu zaangażowania jej członków oraz własnych osiągnięć lub porażek. Daje ona informację czy i w jakim stopniu uczniowie zrealizowali cele lekcji, jakie problemy napotkali, czy współpracowali i uczyli się nawzajem od siebie i wreszcie, czy nauczyciel powinien zmodyfikować działania lub wrócić do realizowanego zagadnienia. W zależności od wieku uczniów i czasu, który mamy do dyspozycji, informację zwrotną możemy otrzymać w różny sposób.



Walizka, worek, kosz [Ciężka, 2019]

Nauczyciel rysuje walizkę, kosz i worek na arkuszu papieru lub w wersji zdalnej na tablicy Jambord, czy OneNote. Uczniowie przyklejają karteczki z informacjami:

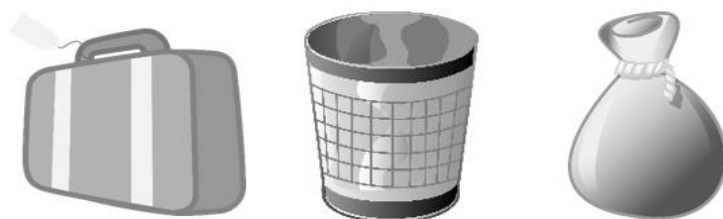
Walizka – Co z dzisiejszej lekcji zabieram ze sobą? Czego się nauczyłem?

Kosz – Co na dzisiejszej lekcji nie udało mi się?

Worek – Co z dzisiejszej lekcji chciałbym wyjąć z worka, poskładać i włożyć do walizki? Nad czym muszę popracować? Do czego wrócić?

Na końcu dobrze jest przeprowadzić wspólną analizę odpowiedzi.

Ilustracja 3 Informacja zwrotna – walizka, kosz, worek



Źródło: [*Clker-Free-Vector-Images*](#) z [*Pixabay*](#)

1.3 Grupa w praktyce

Proponuję, aby nauczyciel realizując lekcję w formie pracy grupowej uwzględnił następujące elementy:

- dokonanie podziału klasy na grupy,
- określenie zasad współpracy w zespole (metoda i czas pracy, sposób prezentacji wyników, opcjonalny wybór lidera czy prezentera),
- ustalenie zasady komunikacji z nauczycielem i innymi grupami (kto będzie odpowiedzialny za kontakty z nauczycielem, czy jest nieograniczona liczba pytań, czy można kontaktować się z innymi grupami),
- wyjaśnienie celów lekcji i podanie kryteriów osiągania sukcesu,
- podanie zadań do wykonania,
- określenie sposobów monitorowania wiedzy,
- zaplanowanie udzielania informacji zwrotnej i ewentualnie wystawianie ocen.



W każdym zespole są osoby, które z racji swoich predyspozycji automatycznie kierują pracą. Można wówczas zaproponować uczniom wariant pracy, w którym nie wybierają formalnie osób funkcyjnych. Jeżeli jednak w klasie trudno o kooperację, gdy w grupie jest kilku kłócących się liderów, albo wszyscy członkowie grupy po kolei zadają nauczycielowi to samo pytanie, czy też nikt nie chce prezentować rozwiązania, to dobrze wybrać osoby odpowiedzialne za koordynowanie prac, kontakt z nauczycielem lub prezentujące rozwiązanie.

1.3.1 Zadania „narysuj” a stanie się łatwe

Zadania o treści geometrycznej bardzo często są postrzegane przez nastolatki jako trudne, dlatego też uczniowie czekają na wskazówki od nauczyciela nie próbując samodzielnie przedyskutować problemu, czy rozwiązać zadania. Metoda grup eksperckich (puzzle, układanka, jigsaw) wymusza współpracę, która aktywnie włącza wychowanków w proces uczenia się. Uczniowie – eksperci rozwiązują problem w grupach eksperckich, a następnie są odpowiedzialni za wytłumaczenie i nauczanie części materiału swoich kolegów. Oczywiście nauczyciel jest mentorem, wspiera uczniów w ich pracy, daje wskazówki. Jednak, aby osiągnąć pozytywny rezultat, każdy uczeń musi skorzystać z wiedzy i umiejętności innego ucznia, każdy też musi pomóc kolegom.

Wiek: klasa VIII

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie:

- obliczają pole koła o danym promieniu lub danej średnicy,
- stosują strategię wynikającą z treści zadania, tworzą strategię rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych (...) (wymaganie ogólne IV. 3).

Pomoce: zestawy zadań dla każdej z grup, brystol, przybory do rysowania.

Przygotowania: przed zajęciami należy przygotować miejsce do pracy w grupach macierzystych oraz 4 stoliki eksperckie.

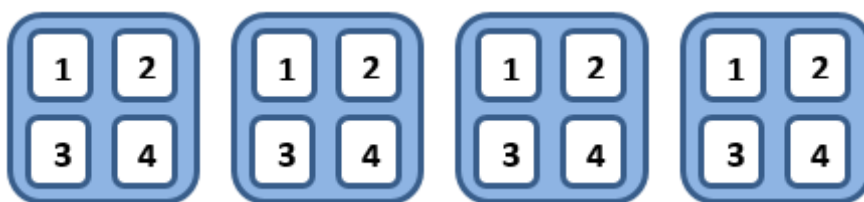


Przebieg zajęć:

Krok 1 (grupy macierzyste) – 5 min

Dzielimy losowo uczniów na zespoły czteroosobowe (w najlepszym przypadku liczba osób w grupie jest równa liczbie utworzonych grup) i przydzielamy do rozwiązania cztery zadania. Każda osoba w losuje jedno zadanie oznaczone liczbami 1 – 4.

Ilustracja 4 Grupy macierzyste



Źródło: opracowanie własne

Przykładowy zestaw zadań do losowania:

Zadanie 1 [Mason i in., 2005, s. 34]

Koza jest uwiązana powrozem o długości 8 m do zewnętrznego rogu prostokątnej szopy o wymiarach 4 m na 6 metrów, stojącej na łące. Jak duża jest powierzchnia łąki, na której może paść się koza?

Zadanie 2

Koza jest uwiązana powrozem o długości 7 m do zewnętrznego rogu prostokątnej szopy o wymiarach 4 m na 6 metrów, stojącej na łące. Jak duża jest powierzchnia łąki, na której może paść się koza?

Zadanie 3

Koza jest uwiązana powrozem o długości 8 m na środku dłuższego boku prostokątnej szopy o wymiarach 4 m na 6 metrów, stojącej na łące. Jak duża jest powierzchnia łąki, na której może paść się koza?

Zadanie 4

Koza jest uwiązana powrozem o długości 7 m na środku krótszego boku prostokątnej szopy o wymiarach 4 m na 6 metrów, stojącej na łące. Jak duża jest powierzchnia łąki, na której może paść się koza?

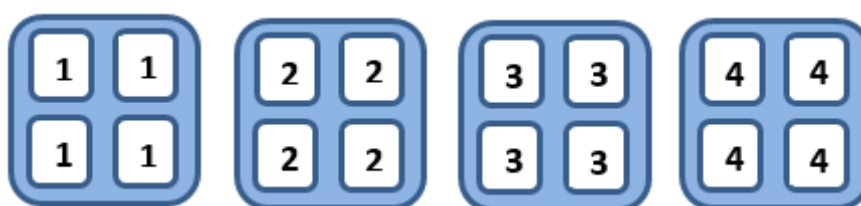


Krok 2 (grupy eksperckie) – 10 min

Uczniowie pracują w grupach eksperckich, które mają za zadanie przedyskutować zadania, zrobić odpowiednie rysunki i wymyślić sposób rozwiązania.

Przy pierwszym stoliku pracują osoby, które rozwiązują zadanie nr 1, przy drugim nr 2, trzecim – 3, a czwartym – 4. Każda osoba w zespole ekspertów musi na tyle dobrze zrozumieć zagadnienie, żeby móc wytłumaczyć je w grupie, macierzystej.

Ilustracja 5 *Grupy eksperckie*

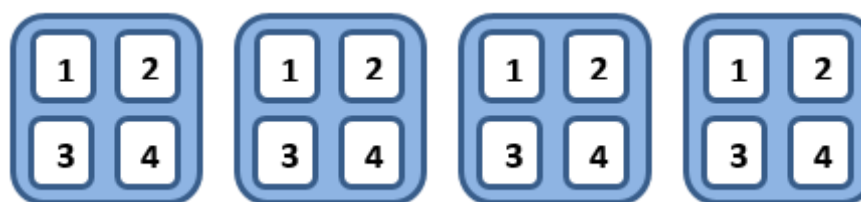


Źródło: opracowanie własne

Krok 3 (powrót do grupy macierzystej) – 15 min

Ekspersi wracają do grup macierzystych, dzielą się zdobytą wiedzą i tłumaczą pozostałym osobom w zespole, jak należy rozwiązać zadania.

Ilustracja 6 *Grupy macierzyste*



Źródło: opracowanie własne

Krok 4 (sprawdzenie wiedzy) – 15 min

Na końcu eksperci sprawdzają, czy uczniowie w ich zespole macierzystym nauczyli się rozwiązywać wszystkie zadania. Uczniowie przygotowują plakaty z rysunkami i rozwiązaniem zadania.



W ostatniej fazie lekcji nauczyciel w sposób losowy wybiera uczniów - prezenterów rozwiązań, w każdym z przypadków nie mogą to być eksperci od konkretnego zadania. Podsumowuje rozwiązania, udziela informacji zwrotnej oraz przeprowadza ewaluację zajęć. W przypadku metody puzzli cała grupa powinna być oceniona jednakową oceną.

1.3.2 Zadania na dowodzenie

Z analizy rezultatów egzaminów ósmoklasisty wynika, że uczniowie bardzo często opuszczają zadania wymagające wykorzystania rozumowania i argumentacji. Można jednak zachęcić uczniów do „rozwijania i wykorzystywania myślenia i postrzegania matematycznego do rozwiązywania problemów w codziennych sytuacjach”. [Dziennik Urzędowy Rady Europejskiej, 2018, s. 9]. Zaletą metody: Pomyśl – Przedyskutuj – Podziel się (Think Pair Share) jest przeplatanie się aktywności nastolatków w różnych formach: pracy indywidualnej, pracy w parach, pracy w grupie. Uczniowie – najpierw rozwiązują problem samodzielnie, a następnie dyskutują o sposobach rozwikłania go w parach i grupach. Metoda uczy wymiany doświadczeń, znajdowania alternatywnych sposobów rozwiązania problemu, udzielania pomocy kolegom oraz współpracy bez konkurencji. Daje najstarszym uczniom poczucie bezpieczeństwa bez presji otrzymania złej oceny.

Wiek: klasa VII lub VIII

Pomoce: zestawy zadań dla każdej osoby, zestaw ponumerowanych piłeczek odpowiadający liczbie uczniów w klasie, arkusz brystolu.

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie:

- przeprowadzają proste rozumowanie, podają argumenty uzasadniające poprawność rozumowania, odróżniają dowód od przykładu (IV.1),



- stosują poznaną wiedzę oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody z zakresu arytmetyki do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym.

Przygotowania: przed zajęciami należy przygotować miejsca tak, aby uczniowie mogli sprawnie zmieniać miejsca w zależności od formy pracy.

Przebieg zajęć:

Krok 1 (Pomysł) – 10 min

We wstępnej fazie lekcji uczniowie losują piłeczki i zapisują wybrane numery. Nauczyciel rozdaje zadania do samodzielnego rozwiązania oraz przypomina zasady rozwiązywania zadań na dowodzenie. Można je rozwiązywać dowolną metodą: algebraiczną, arytmetyczną, graficzną, czy metodą prób i poprawek [Dąbrowski, 2020], ale uczeń powinien odróżniać dowód od przykładu. Każdy z uczniów zapisuje próby rozwiązania.

Krok 2 (Przedyskutuj) – 10 min

Nastolatki dobierają się w pary zgodnie z zasadą: 1-2, 3-4, 5-6,... wymieniają się pomysłami i przygotowują wspólnie ustalone rozwiązanie problemu.

Krok 3 (Podziel się) – 10 min

Dwuosobowe zespoły łączą się w czwórki: 1-4, 5-8, 9-12,... przedstawiają i porównują efekty pracy obu par. Grupa przygotowuje prezentację z rozwiązaniem w formie plakatu (lub umieszcza rozwiązane w pliku do pracy wspólnej np. Jambord).



Przykładowe zadania do wyboru:

Zadanie 1

Leśniczy Tomasz zamierza posadzić na leśnej polanie drzewa. Na połowie swojej działki posadzi sosny, na $\frac{1}{3}$ świerki, a na $\frac{1}{5}$ dęby. Czy taki podział polany jest możliwy? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 2

Leśniczy Karol kupił swojej żonie Karolinie bukiet złożony tylko z tulipanów i róż, w którym tulipanów było trzy razy więcej niż róż. Za jeden tulipan trzeba zapłacić 1,8 zł, a za różę 5 zł. Czy można kupić taki bukiet za 50 zł? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 3

Paulina dostała od dziadka torebkę z orzechami włoskimi, których liczba jest podzielna przez 12. Postanowiła, że podzieli się z rodzeństwem w następujący sposób: siostrze przypadnie $\frac{1}{4}$ całej torebki orzechów, bratu $\frac{1}{3}$ reszty, a sama weźmie $\frac{7}{12}$. Czy taki podział cukierków jest możliwy? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 4

W Tłusty Czwartek Janek przyniósł do szkoły pudełko z pączkami nadzianymi marmoladą truskawkową albo budyniem. Stosunek liczby pączków z marmoladą do liczby pączków z budyniem był równy 2 : 3. Pączek z marmoladą kosztuje 3,5 zł, a z budyniem 3 zł. Czy jest możliwe, że zapłacił za pączki 100 zł? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 5



W cukierniach **Ptyś** i **Eklerek** sprzedawane były babeczki czekoladowe w tej samej cenie. Z okazji Dnia Dziecka w obu cukierniach zaproponowano promocje:
Pani Małgorzata zakupiła 12 babeczek w cukierni **Ptyś**, a pani Karolina dwanaście babeczek w cukierni **Ekler**.



Ilustracja 7 Ilustracja do zadania 5

Ptyś

przy zakupie pięciu babeczek
czekoladowych szósta gratis

Ekler

przy zakupie trzech babeczek
czekoladowych 50% zniżki na
trzecią babeczkę.

Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Wybierz P – jeżeli zdanie jest prawdziwe, F – jeżeli fałszywe.

Pani Karolina zapłaciła więcej niż pani Małgorzata.	P	F
Pani Karolina zapłaciła 1 czerwca prawie o 20% mniej niż gdyby kupiła babeczki w maju.	P	F

Źródło: opracowanie własne

Metoda: Pomyśl – Przedyskutuj – Podziel się bardzo dobrze pasuje również do rozwiązywania zadań z kombinatoryki, w których trzeba rozpatrzyć wszystkie możliwości usadzenia osób w przedziale kolejowym, rozmieszczenia gości w dwuosobowych pokojach w hotelu, itp.



1.3.3 Ile matematyki jest w lesie?

Czy na matematyce jest za dużo matematyki? Czy lekcje nie zawierają zbyt dużo teorii, która wydaje się nikomu niepotrzebna? Dobrze jest czasem oderwać uczniów od ekranu komputera, zabrać ich na wycieczkę do lasu, niech zaplanują i wykonają pomiary szerokości oraz długości ścieżek, wymiary gniazd, czyli powierzchni do nasadzeń i liczbę sadzonek sosny, które można tam posadzić, długości i koszt grodzień, liczbę drzew poszczególnych gatunków itp. Wskazówek, jakie są różne techniki mierzenia powierzchni w lasach i dlaczego robione są takie pomiary, może udzielić pani Dominika Nadolna z Nadleśnictwa Lipka w filmie: Ile kraczek ma ten las? Czyli co i jak mierzymy w lesie? Dostępnym pod adresem: [LINK do filmu na youtube.com](#).

Po powrocie do szkoły można zaproponować czteroosobowym grupom przygotowanie planu lub makiety lasu w odpowiednio dobranej skali. Zwróćmy uczniom uwagę, że jeżeli pewien odcinek w terenie ma długość 500 m to w skali 1: 2000 ma długość 25 cm (prawie długość kartki formatu A4), więc wybór skali zależy od wymiarów rzeczywistych danego obszaru i wielkości planu. Uczniowie powinni wykorzystać notatki z wycieczki do lasu i wspólnie wykonać projekt w szkole. Wspólne działanie rozwija przedsiębiorczość i kreatywność, wspiera integrację zespołu klasowego, w którym uczniowie, dzięki pracy w grupie, uczą się rozwiązywania problemów, aktywnego słuchania, skutecznego komunikowania się, a także wzmacniają poczucie własnej wartości. Metoda projektu wdraża uczniów do planowania oraz organizowania pracy, a także dokonywania samooceny [Podstawa programowa, 2017, s.8].



2. NAUKA PRZES DOŚWADCZENIE

To, co odkryć musiałeś samodzielnie, zostawia w twym umyśle ścieżkę, którą w razie potrzeby możesz pójść jeszcze raz.

Georg Christoph Lichtenberg

Dlaczego uczniowie mają trudności z opanowaniem wiadomości i umiejętności z matematyki? Wynika to z faktu, że postrzegają ją jako zestaw reguł i algorytmów wykorzystywanych do wykonania ćwiczeń określonych programem nauczania. Aby zapobiec niepowodzeniom powinniśmy uciekać się do takich metod i form pracy, które pokażą nastolatkom praktyczne oblicze Królowej Nauk. Warto w jej nauczaniu wykorzystać metodę eksperymentu/doświadczenia, która przybliży uczniom taką matematykę, jaką spotykają w swoim życiu.

Uczniowie współpracując podczas doświadczeń rozwijają kompetencje miękkie takie jak zdolność do kooperacji, efektywna komunikacja, kreatywne rozwiązywanie problemów, cierpliwość i tolerancja wobec pomysłów innych osób, spostrzegawczość i umiejętność wyciągania wniosków. Nabywają też umiejętności planowania pracy i jej podziału ze względu na predyspozycje. Lepiej też przyjmują krytykę i chętniej uczą się od rówieśników niż nauczyciela. Amerykański teoretyk metod nauczania David Kolb, opierając się na badaniach Johna Deweya, Kurta Lewina czy Jeana Piageta stworzył w latach 80-tych ubiegłego wieku teorię uczenia się przez doświadczenie (*Experiential Learning Model*). Model Kolba jest sposobem projektowania efektywnego procesu nauczania w cyklach złożonych z czterech powiązanych ze sobą etapów, które umożliwiają szybsze i bardziej trwała zapamiętywanie:

1. Aktywne doświadczenie.
2. Refleksyjne obserwowanie, zbieranie informacji, dzielenie się spostrzeżeniami.
3. Formułowanie wniosków i uogólnień wynikających z obserwacji.
4. Znajdowanie zastosowań teorii w praktyce, wymyślanie nowych doświadczeń, czyli... rozpoczynanie następnego cyklu.



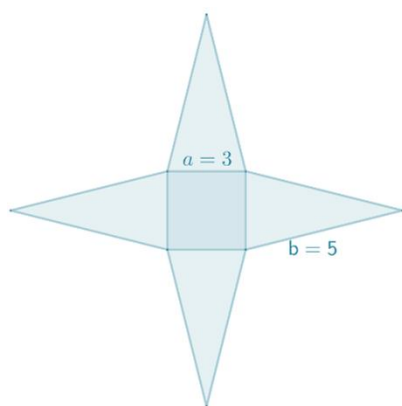
Ilustracja 8 Cykl Kolba



Źródło: opracowanie własne

Nauczanie matematyki w tradycyjny sposób opiera się na schemacie: teoria – zastosowanie do rozwiązywania zadań. Uczniowie często zadają pytanie: Dlaczego się tego uczę? Do czego będzie mi to potrzebne? Nie widzą sensu uczenia się kolejnego wzoru czy algorytmu. Ich wiedza jest nietrwała, zgodnie ze studencką zasadą: zakuć - zdać - zapomnieć. Dlaczego ósmoklasista na egzaminie zapomina wziąć trzecią część iloczynu pola podstawy i wysokości licząc objętość ostrosłupa - bo nie próbował eksperymentować z przelewaniem wody (przesypywaniem piasku) z ostrosłupa do graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości.

Ilustracja 9 Siatka ostrosłupa



Dlaczego nastolatek oblicza sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku obok:

$8 \cdot 5 = 40$ lub $4 \cdot 3 + 8 \cdot 5 = 52$
zamiast poprawnie: $4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 32$?

Źródło: opracowanie własne

Bo nie próbował skleić lub złożyć modelu ostrosłupa i nie odczytuje z rysunku, że liczby krawędzi bocznych i podstaw są sobie równe.



Wykorzystując do nauki wszystkie cztery etapy cyklu Kolba, chociaż w dowolnej kolejności, nauczyciel implikuje nie tylko poznawanie teorii, ale uczy, jak działać, obserwować, wyciągać wnioski, utrzymywać wiedzę i umiejętności w sytuacjach problemowych. Daje uczniom możliwość zaangażowania w uczenie się w zależności od preferowanego stylu. Kompetencje, których nabędą wywierają wpływ na ich uczenie się, postrzeganie świata i rządzących nim zależności.

2.1 Przygotowanie doświadczeń/eksperymentów

Czy na matematyce uczniowie przeprowadzają eksperymenty, czy doświadczenia?

Doświadczenie wspiera proces nauczania wiedzą praktyczną i zostało już wcześniej przez kogoś wykonane. Uczeń przeprowadzając badanie odtwarza rutyny, które wyjaśniają fakty, definicje lub twierdzenia. Eksperyment natomiast ma na celu sformułowanie i sprawdzenie poprawności postawionej hipotezy. Na lekcjach matematyki częściej zatem wykonuje się doświadczenia, bo przecież uczeń nie wymyśli nowej wartości liczby $\sqrt{2}$, czy zależności między bokami w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 30° i 60° , bo to już zostało zbadane i udowodnione.

Przygotowując scenariusz zajęć, na których zostanie wykorzystane doświadczenie lub eksperyment warto tak zaplanować ćwiczenia, aby uczniowie odkryli, uogólnili i zastosowali w praktyce wiedzę przydatną nie tylko na dalszym etapie edukacji, ale również w życiu codziennym. Wyraźnie postawiony problem badawczy powinien podniecić zainteresowanie i zachęcić go do wykonania doświadczenia.

W planowaniu warto uwzględnić następujące etapy:

- określenie celu badania,
- sformułowanie problemu badawczego (i hipotezy, jeżeli to eksperyment),



- przeprowadzenie doświadczenia,
- zebranie wyników,
- wyciągnięcie wniosków (i weryfikacja hipotezy),
- zastosowanie wiedzy w praktyce.

2.2 Eksperyment w praktyce

Nauczyciel znając klasę może wybrać doświadczenia o odpowiednim dla niej stopniu trudności, opracować kartę pracy, na której znajdzie się opis badania, dokładna instrukcja działania, miejsce do zapisywania obserwacji, refleksji oraz wniosków.

2.2.1 Ludolfina. Wyznaczanie wartości liczby π

Doświadczenie przeprowadzane w zespołach dwu- i trzyosobowych.

Materiały i narzędzia:

Okrągłe przedmioty, linijka, ekierki, nitka, paski papierowe, ołówek, cienkopis, suwmiarka, tabela pomiarów, kalkulator prosty lub telefon komórkowy.

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie:

- wskazują średnicę oraz promień koła i okręgu,
- obliczają długość okręgu o danym promieniu lub danej średnicy,
- obliczają promień lub średnicę okręgu o danej długości okręgu.

Pytanie problemowe:

Czy obwód koła zależy od długości średnicy?

Obrus babci Janiny ma kształt koła o średnicy 2m. Kasia postanowiła zrobić babci prezent i obszyć jego brzeg bawełnianą koronką. Ile metrów koronki powinna kupić? Wynik podaj z dokładnością do 1cm.

Instrukcja do doświadczenia:

1. Wybierzcie jeden z okrągłych przedmiotów.



2. Wykorzystując dostępne materiały zmierzcie jak najdokładniej średnicę, a następnie obwód koła.
3. Powtórzcie każdy pomiar trzykrotnie.
4. Zapiszcie wyniki na karcie pomiarów.
5. Wykorzystując kalkulator/arkusz Excell/telefon wyznaczcie stosunek długości średnicy do obwodu i wpiszcie wyniki do tabeli pomiarów.
6. Wybierzcie kolejne 3 przedmioty i wykonajcie punkty 1 - 5.
7. Zapiszcie wnioski i spostrzeżenia grupy (analiza-wnioskowanie).
8. Zastosujcie wnioski do rozwiązywania problemu (praca indywidualna).

Ilustracja 10 Tabela pomiarów



Tabela pomiarów			
Przedmiot	l obwód koła w cm	2r długość średnicy w cm	stosunek długości obwodu do średnicy tzn. l:2r

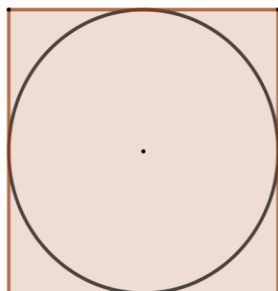
Źródło: opracowanie własne

Podczas doświadczenia uczniowie mogą mieć problemy z metodami wyznaczania długości średnicy lub obwodu koła. Warto, by podczas pracy w grupach nauczyciel służył pomocą i weryfikował błędne algorytmy pomiaru. Dobrze też uczulić uczniów na konieczność precyzyjnego wykonania zadania, wówczas wartość liczby π można wyznaczyć nawet z dokładnością do trzech, czterech cyfr po przecinku.

Lekcję można zakończyć prezentacją multimedialną z wykorzystaniem przykładów z literatury i historii. Scenariusz zajęć w załączniku nr 1.



Ilustracja 11 Koło wpisane w kwadrat



Zadanie można zmodyfikować i wyznaczyć wartość ludolfiny wykorzystując wzór na pole koła.

Problem badawczy:

Na kwadratowym arkuszu tektury narysowano okrąg tak jak na rysunku 6. Jak wykorzystując nożyczki, wagę i kalkulator wyznaczyć wartość liczby π ?

Źródło: opracowanie własne

2.2.2 Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta

[Karpiński i in., 2002, s. 190-191]

Doświadczenie przeprowadzane w zespołach dwu- i trzyosobowych na zajęciach dodatkowych.

Materiały i narzędzia:

Tektura lub blok techniczny, nitka, duże spinacze, ołówek, linijka.

Cele lekcji:

Uczniowie wskazują podstawowe punkty szczególne w trójkącie - środek ciężkości oraz korzystają z ich własności.

Problem badawczy:

Czy możliwe jest zbudowanie trójkątnego stolika podpartego na jednej nodze?

Instrukcja do doświadczenia

1. Narysujcie i wytnijcie z kartonu dowolny trójkąt.
2. W dowolnym punkcie w pewnej odległości od wierzchołków przebijcie trójkąt spinaczem i powieście na nim trójkąt.
3. Na tym samym spinaczu zaczepcie nitkę i obciążcie innym spinaczem.
4. Narysujcie linię, którą wyznacza nitka. Możecie wykorzystać linijkę.



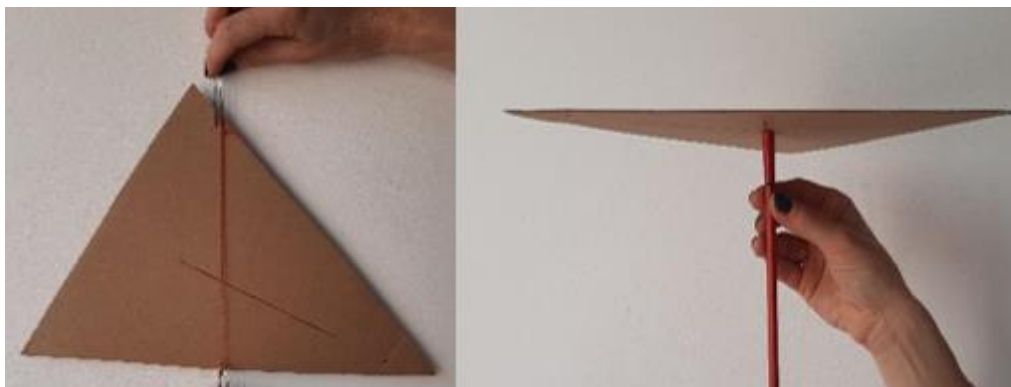
Ilustracja 12 Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta cz. 1



Źródło - archiwum prywatne

5. Wybierzcie inny punkt i wykonajcie te same czynności.
6. Znajdźcie punkt przecięcia obu linii i nazwijcie go literą S.
7. Ustawcie trójkąt na ołówku podpierając go w punkcie S

Ilustracja 13 Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta cz. 2



Źródło - archiwum prywatne

8. Narysujcie odcinki łączące wierzchołki trójkąta z przeciwległym bokiem przechodzące przez punkt S (odcinki te nazywamy środkowymi trójkąta).
9. Zastanówcie się, dlaczego punkt S nazywamy środkiem ciężkości trójkąta?
10. Na jakiej długości odcinki środkowa dzieli bok trójkąta?
11. Jak wyznaczyć środek ciężkości trójkąta wykorzystując ołówek i linijkę?
12. Na jakiej długości odcinki punkt S dzieli środkową? Co zauważyliście?



13. Zapiszcie wnioski i spostrzeżenia grupy (analiza-wnioskowanie).

14. Zastosujcie wnioski do graficznego rozwiązania problemu:

Jak wyznaczyć środek ciężkości trójkąta wykorzystując ołówek i linijkę?

Na zakończenie grupy przygotowują notatkę z zajęć w postaci mapy myśli.

Ćwiczenie można modyfikować. Uczniowie mogą spróbować wyznaczyć punkt podparcia stolika w kształcie trapezu albo równoległoboku.

Wykonanie ćwiczenia wymaga współpracy uczniów i postępowania zgodnie z instrukcją. Osiągnięcie celu jakim jest wyznaczenie punktu podparcia stolika pozytywnie wpływa na motywację grupy, mobilizuje do wyciągania wniosków i kreatywnego rozwiązywania problemu wyznaczenia punktu podparcia stolika w innym kształcie.

2.2.3 Symetrie - budowanie figur środkowo i osiowosymetrycznych

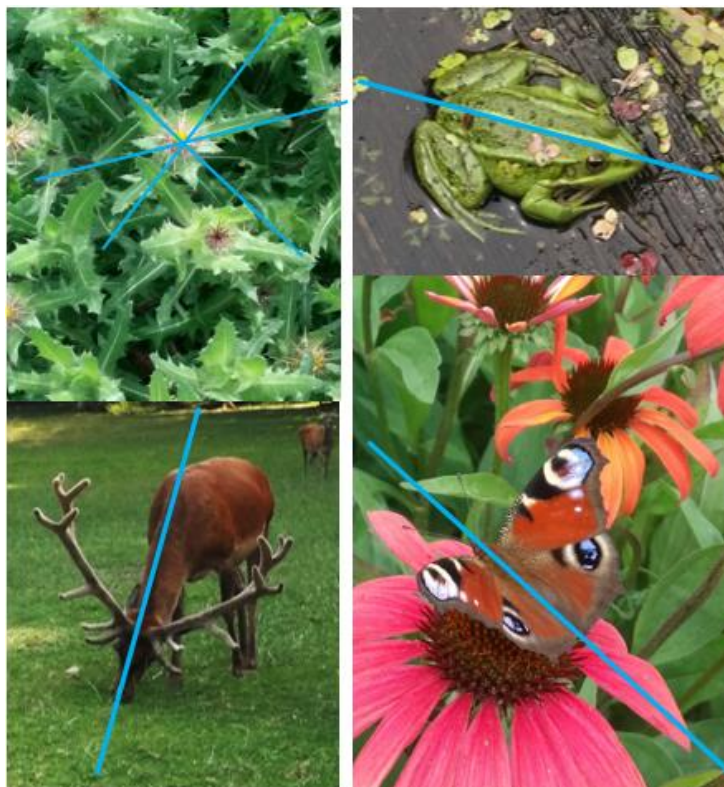
Lekcję proponuję przeprowadzić metodą lekcji odwróconej. Uczniowie wyszukują dzień wcześniej w parku lub lesie obiekty przyrodnicze, które posiadają środek lub osie symetrii. Robią ich zdjęcia i umieszczają w pliku do wspólnej pracy. Podpisują każdy rysunek nazwą gatunku, zaznaczają środki i osie. Na początku lekcji nauczyciel stawia pytanie:

Czy łatwo jest znaleźć symetrię w lesie, parku, czy ogrodzie?

Następnie przeprowadza z uczniami pogadankę nt. symetrii w przyrodzie, w której wykorzystuje otrzymane od uczniów obrazy podobne do takich jak poniżej.



Ilustracja 14 Symetrie w przyrodzie



Źródło - archiwum prywatne

W części właściwej lekcji proponuję przeprowadzić doświadczenie w zespołach dwu-czterooosobowych.

Materiały i narzędzia:

Papier ksero, nożyczki, atrament, farba plakatowa.

Linijka i lusterko, ale tylko do sprawdzania poprawności konstrukcji.

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie:

- rozpoznają figury osiowosymetryczne i wskazują ich osie symetrii oraz uzupełniają figurę do figury osiowosymetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury,
- rozpoznają figury środkowosymetryczne i wskazują ich środki symetrii.

Pytanie problemowe:

Czy można zbudować figury osiowosymetryczne i środkowosymetryczne bez użycia ołówka i linijki?



Przebieg doświadczenia:

1. Wykorzystując ułożone na stole materiały zbudujcie:
 - a) figurę z jedną osią symetrii
 - b) figurę z dwiema osiami symetrii
 - c) figurę z trzema osiami symetrii
 - d) figurę z czterema osiami symetrii
 - e) figurę, która ma środek symetrii
2. Sprawdźcie poprawność konstrukcji za pomocą pomiaru odległości.
3. Napiszcie krótką instrukcję do eksperymentu, który polega na skonstruowaniu figury środkowosymetrycznej oraz takiej, która ma 6 lub 8 osi symetrii.
4. Kiedy nie uda się zbudować figury środkowosymetrycznej, a kiedy figury osiowosymetrycznej? Zapiszcie wnioski.
5. Zaprezentujcie swoje pomysły i wnioski przed kolegami z innych grup.



2.2.4 Twierdzenie Pitagorasa w praktyce

Teoria Pitagorasa jest chyba najbardziej znanym i lubianym wśród nastolatków twierdzeniem. W literaturze można znaleźć ponad 100 różnych jego dowodów algebraicznych lub geometrycznych. Niektóre z nich wykorzystują równość pól, inne podobieństwo czy rozcinanie i układanie figur.

Doświadczenie przeprowadzane w zespołach dwu- i trzyosobowych.

Materiały i narzędzia:

Kartka papieru: Diamonds with Full Grid (darmowa do wydruku w Internecie lub przygotowana samodzielnie z wykorzystaniem np. GeoGebry), ołówek, linijka, kredki.

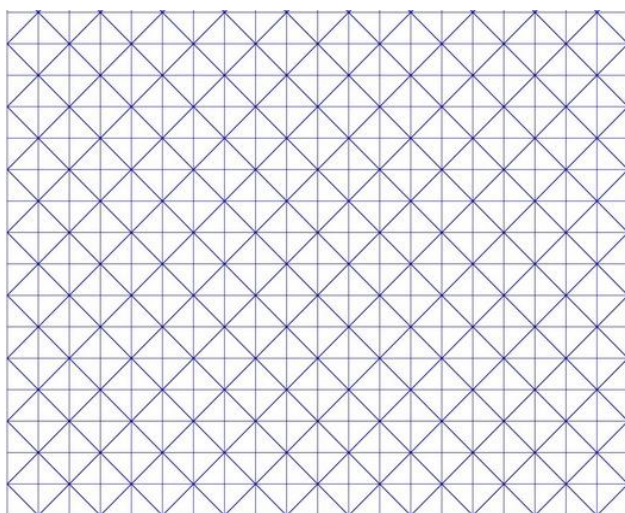
Cele lekcji:

Uczniowie znają i stosują w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa.

Problem badawczy:

Czy można zilustrować twierdzenie Pitagorasa wykorzystując tylko kartkę papieru jak poniżej?

Ilustracja 15 *Siatka: Diamonds with Full Grid*



Źródło: opracowanie własne

Instrukcja do doświadczenia

1. Narysujcie na kartce dowolny trójkąt prostokątny równoramienny.
2. Zbudujcie na jego bokach kwadraty.



3. Sprawdźcie, ile małych trójkątów mieści się wewnątrz każdego z kwadratów.
4. Zapiszcie wewnątrz każdego kwadratu liczbę trójkątów, z których jest zbudowany.
5. Porównajcie liczbę trójkątów wewnątrz największego kwadratu i sumę liczb z małych kwadratów.
6. Powtórzcie ćwiczenie dla kilku innych trójkątów.
7. Zapiszcie wnioski.

W podsumowaniu ćwiczenia można przeprowadzić dyskusję uwzględniając pytania: Jakie są wady tej metody? Jak inaczej można zilustrować twierdzenie Pitagorasa? Do czego jeszcze można wykorzystać taką kartkę papieru na matematyce?

Inspiracją do rozmowy mogą być filmy, które ilustrują treść twierdzenia:

[Film Twierdzenie Pitagorasa na własne oczy](#)

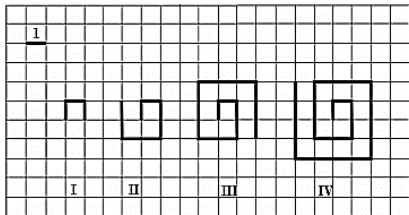
[Film Demonstracja twierdzenia Pitagorasa](#)

[Film model twierdzenia Pitagorasa do nauki](#)

2.2.5 Szukanie regularności

Ilustracja 16 Zadanie 12 arkusz ósmoklasisty z matematyki 2020

Zadanie 12. (0–1)
Na kartce w kratkę Tomek narysował według pewnej reguły cztery łamane (patrz rysunek).



Długości tych łamanych zapisz w tabeli.

Numer łamanej	I	II	III	IV
Długość łamanej	3	8	15	24

Kolejne łamane – od numeru V – Tomek rysował zgodnie z tą samą regułą.

Uzupełnij poniższe zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Łamana o długości 48 ma numer .

Łamana o numerze VIII ma długość .

A. VI B. VII
C. 63 D. 80

Na egzaminie ósmoklasisty pojawiają się zadania wymagające odszukania regularności, analogii i podobieństw. Takie jak zadanie 12 z egzaminu ósmoklasisty z 2020 roku.

Źródło: CKE 2020, OMAP-100-2004



Są one doskonałą okazją na ćwiczenie rozwijanie myślenia matematycznego, analizy i uogólniania. Rozwiązywanie takich zadań stwarza uczniom możliwości badania własności figur, ciągów liczb, znaków, uczy zauważania zależności w życiu codziennym.

Doświadczenie przeprowadzane w zespołach czteroosobowych.

Materiały i narzędzia: kartka papieru, długopis, arkusz papieru do prezentacji rozwiązania.

Cele lekcji:

Uczniowie dostrzegają regularności, podobieństwa oraz analogie i formułują wnioski na ich podstawie.

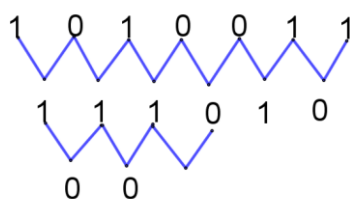
Problem badawczy:

Zapisać w jednej linii ciąg zer i jedynek dowolnej długości. Pod każdą parą zapisać cyfrę zero, jeśli obie liczby są jednakowe lub cyfrę 1, jeśli są różne.

Powtarzajcie tę operację tak długo, aż zostanie jedna liczba w rzędzie

[patrz Ilustracja 16]. Czy będzie to zero, czy jedynka? [Mason i in., 2005, s. 186]

Ilustracja 17 Schemat do zadania: szukanie regularności



i tak dalej w dół

Źródło: opracowanie własne

Przebieg doświadczenia:

Uczniowie w grupach rozpatrują różne przypadki wielocyfrowych ciągów zer i jedynek. Porównują rozwiązania i zapisują wnioski. Ustalają, kiedy pojawia się na końcu cyfra 0, a kiedy 1. Uczą się krytycznego myślenia, obrony własnych



i słuchania cudzych argumentów. Zadanie jest zbyt trudne, aby przeciętny uczeń rozwiązał je samodzielnie podczas lekcji. Prawdopodobnie zniechęciłby się po 3-4 przypadkach. Zatem największą korzyścią pracy zespołowej jest wzajemne motywowanie się i doprowadzenie rozwiązania do końca.

Efektem pracy uczniów jest prezentacja rozwiązań i wniosków. Podsumowując lekcję nauczyciel może nagrodzić oceną grupy, które wskazały poprawne wnioski.



3. NAUKA PRZESZ ZABAWĘ – GRYWALIZACJA

Gra dydaktyczna ma na celu nie tylko zdobywanie i utrwalanie wiedzy z danego przedmiotu, (...) *to okazja, najczęściej przyjemna i wciągająca, do nauczenia się czegoś ważnego* [Dąbrowski, 2015]. Rozgrywki, nawet te komputerowe, stosowane w rozsądnych granicach, są dobrą alternatywą na spędzanie czasu wolnego, ale również naukę. Działając wielozmysłowo powodują, że osoby grające mogą asymilować znacznie więcej informacji i zapamiętują je na dłużej.

Gry, szczególnie zespołowe, to koktajl wiadomości, umiejętności i postaw. Rozwijają kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, także w językach obcych, kształcą umiejętności cyfrowe, logiczne myślenie, kompetencje społeczne i kulturowe, dają podstawy przedsiębiorczości i inżynierii. Uczą podstawowych zasad współpracy i komunikacji, argumentowania i słuchania racji innych osób, a co za tym idzie podejmowania trafnych decyzji. Kształcą umiejętności przywódcze, wyrównują szanse, pomagają akceptować porażki i uczą zasad zdrowej rywalizacji.

Dziesięciolatek na pewno chętniej powtórzy tabliczkę mnożenia wykorzystując rozgrywkę online www.grydladzieci.pl/tabliczka-mnozenia/ niż licząc nudne przykłady z podręcznika. Natomiast gry takie jak: Rozpoznawanie brył memory: didactus.edupolis.pl/resources/bryly czy gra zręcznościowa dotycząca porządkowania liczb całkowitych: didactus.edupolis.pl/resources/liczby-calcowite, obie z Kujawsko-Pomorskiej Platformy Edukacyjnej Edupolis, ćwiczą spostrzegawczość, wyobraźnię i koncentrację uwagi.



3.1 Emocje, zasady, ocenianie

Kto z nas nie lubi wygrywać? Każdy przecież chce być w czymś najlepszy. I nie chodzi tu o stopnie szkolne. Szeroko rozumiana grywalizacja ma na celu wprowadzenie mechanizmów motywacji wewnętrznej rodem z gier komputerowych do innych aspektów życia – w naszym przypadku edukacji. Zbieranie punktów, pokonywanie misji, poziomy, odznaki, rankingi to widoczny dla uczestników gry progres, który stymuluje motywację wewnętrzną. Dlaczego uczniowie lubią grać? Bo każdy z nich może poczuć się bohaterem.

Zabawy i gry dydaktyczne to skuteczny czynnik kształtujący sferę emocjonalną i motywacyjną ucznia. Rozwijają wytrwałość, siłę woli, chęć pokonania trudności. Rodzą sukcesy, które budzą optymizm i wiarę we własne siły. Ponadto przyczyniają się do intensyfikacji i uatrakcyjnienia procesu kształcenia, a także przeciwdziałają bezmyślnemu reprodukowaniu wiedzy i mechanicznemu jej utrwalaniu [Kapica, 1991]

Gra uczy współpracy i przestrzegania z góry określonych reguł. Uczestnik musi przeczytać ze zrozumieniem i zaakceptować jej zasady. Przy okazji, analizując instrukcję, ćwiczy umiejętność czytania tekstu ze zrozumieniem, zapamiętywania i logiczne myślenie. Są to umiejętności przydatne w życiu codziennym. Jeżeli Jaś czyta ze zrozumieniem zasady gry i potrafi je wytłumaczyć koledze, to Jan będzie rozumiał instrukcję obsługi pralki i złoży z sąsiadem biurko z IKEA. Niestety, nadmierna chęć wygranej może prowadzić do stresu i uzależnienia. Dobrze jest zatem uczyć podopiecznych, że przegrana, to nie koniec świata. Można poćwiczyć i ... następnym razem być pierwszym.

Wygrana w grze sama w sobie jest nagrodą. Zamiast oceny w grach nie wymagających zbudowania strategii, czy skomplikowanych obliczeń, wystarczy informacja zwrotna w postaci: byłeś bardzo blisko celu, gratuluję, wygrałeś, dobrze myślałeś, zabrakło Ci tylko jednego rzutu kostką, spróbuj jeszcze raz, zastanów się, co powinieneś poprawić.



Jeżeli gra stanie się stałym, motywującym elementem pracy na lekcjach, to można utworzyć, klasowy ranking wygranych i tam wstawiać punkty, dawać odznaki i bonusy. Aby wyrównać szanse uczniom z dołu tabeli można doliczać każdemu punkty za współpracę podczas gier zespołowych, zachowanie zasad fair play, czy pomoc innym. Motywująco działa też zaznaczanie strzałkami, o ile miejsc górę w rankingu przesunął się gracz, a na koniec roku nagrodzić wszystkich aktywnych uczestników rankingu tytułem Mistrza Gier Matematycznych.



3.2 Gra dydaktyczna w praktyce

Podczas planowania lekcji z wykorzystaniem gry dydaktycznej proponuję, aby nauczyciel:

- sprecyzował jaki jest cel gry, co ma ona dać graczom,
- określił liczbę i wiek (lub poziom edukacyjny) graczy,
- ustalił zasady gry,
- wskazał kryteria zwycięstwa i porażki (czy będzie ocena wyrażona stopniem),
- wyznaczył rolę nauczyciela w grze,
- przygotował miejsca pracy, potrzebne pomoce (plansze, karty, pionki, kostki, karty do gry).

Podczas lekcji:

- sprawdził poziom zrozumienia reguł gry,
- próbnie rozegrał grę,
- przeprowadził grę z uczniami,
- omówił grę po jej zakończeniu.

Grę dydaktyczną można wprowadzać w różnych momentach lekcji.

Może znaleźć się w części właściwej lekcji i najważniejsze cele lekcji realizowane są poprzez grę, może stanowić rozgrzewkę, albo podsumowanie zajęć. Grą jest również losowy wybór osoby, która będzie prezentować rozwiązanie zadania.

Gra może być nagrodą za sprawne wykonane zadania. Zdolny uczeń, który szybciej osiągnie zamierzone cele, może miło spędzić czas (nie nudząc się) uzupełniając sudoku lub projektując grę dla kolegów, a nauczyciel zyska czas i możliwości na indywidualną pracę z uczniem słabym.

3.2.1 Gra na kartach: Bank w Biglandii

Gra drużynowa w trzy- i czteroosobowych zespołach przeznaczona dla uczniów klasy VII lub VIII.



Pomoce:

- krótka informacja wprowadzająca i zasady gry (wstęp),
- karty do gry z informacjami i ofertami banków do wycinania (zał. 2),
- kalkulator, telefon lub aplikacja kalkulator,
- arkusz papieru do zapisu rozwiązania (wystarczy A3) lub arkusz kalkulacyjny.

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie:

- stosują obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach wielokrotnych podwyżek lub obniżek danej wielkości,
- wykonują działania na ułamkach dziesiętnych, z użyciem własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora,
- zaokrąglają ułamki dziesiętne.

Sposób realizacji/zasady gry: lekcja odwrócona

Dzień przed lekcją polecamy uczniom zapoznać się ze wstępnymi informacjami dotyczącymi zasad gry oraz powtórzyć pojęcia związane z oprocentowaniem lokat i kredytów.

Wstęp

Biglandia – niewielkie królestwo położone na granicy światów, brak dostępu do morza, brak naturalnych zasobów, wszędzie daleko, słabo rozbudowana sieć komunikacyjna, ustrój – monarchia dziedziczna, jednostka monetarna – bigmoneta ($1 \text{ bgm} = 0,987 \text{ pln}$). Stolica państwa Biggoszcz położona w środkowej części królestwa, słabo zaludniona, brak zabytków, w centrum miasta trzy duże nowoczesne banki: Big Bank, Klik Bank i Mig Bank. Głównym źródłem dochodu Biglandii są odnawialne źródła energii, rolnictwo ekologiczne i inwestycje kapitałowe. Król BigMak sam kieruje rządem, jednak nie zna się na inwestycjach i poszukuje osoby odpowiedniej na stanowisko szefa resortu finansów.

www.bigpedia.com, dostęp 1.05.2021



Czy wiesz jak najlepiej wykorzystać oferty banków, aby zostać Ministrem Finansów Biglandii?

Jednostką monetarną w Biglandii jest bigmoneta. Król BigMak daje do dyspozycji 32 000 bigmonet. Po trzech latach trzeba oddać 32 000 bigmonet, reszta to nagroda dla zespołu. Zwycięska drużyna obejmuje Ministerstwo Finansów Biglandii. Wszystkie oferty banków zostały zapisane na kartach. Można podzielić pieniądze i korzystać jednocześnie z ofert kilku banków. Nie wolno podejmować pieniędzy przed zakończeniem lokaty. Odsetki dopisujemy z dokładnością do części setnych. Inwestować można także uzyskane odsetki. Kapitalizacja kwartalna oznacza dopisywanie odsetek co kwartał, roczna – raz na rok. Po upływie terminu lokaty można przenieść pieniądze wraz z odsetkami na inną lokatę oraz zmienić bank.

Powodzenia 😊

Klasę należy podzielić na grupy trzy lub czteroosobowe. Każda z nich otrzymuje zestaw kart do gry (załącznik 2). Nauczyciel zapisuje na tablicy pytanie problemowe: Jak ulokować pieniądze króla BigMaka, aby osiągnąć największy zysk? Uczniowie pracują w grupach. Wybierają najbardziej opłacalny wariant ulokowania pieniędzy i przygotowują sprawozdanie w formie tabeli lub plakatu. Wygrywa drużyna, której uda się osiągnąć i udokumentować najwyższy zysk. Bank w Biglandii jest grą symulacyjną, która w dążeniu do celu wzbudza wśród uczniów wiele emocji. Z mojej praktyki wynika, że przynosi dużo lepsze efekty niż lekcja dotycząca oprocentowania lokat z wykorzystaniem ćwiczeń indywidualnych. Wymaga dobrze zaplanowanej współpracy, zaufania do członków drużyny, podejmowania trafnych decyzji, argumentowania swoich racji oraz słuchania za i przeciw współgraczy, a przede wszystkim umiejętności praktycznego zastosowania obliczeń procentowych. Uważam, że po zaprezentowaniu i przeanalizowaniu wyników należy nagrodzić oceną wszystkie drużyny, które wykazały się poprawnymi obliczeniami.



3.2.2 Cztery iloczyny w linii [modyfikacja za NCTM, 2008]

Liczba uczestników: 2

Wiek: od klasy IV

Pomoce: dwa przezroczyste guziki (lub inne znaczniki np. spinacze), pionki do gry w dwóch kolorach po 18 sztuk, mogą być guziki, nakrętki, kolorowe kółka, monety), plansza do gry.

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie mnożą i dzielą liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym lub w pamięci.

Zasady gry:

Nauczyciel dzieli klasę na dwuosobowe zespoły, w każdej parze uczniowie losują osobę, która rozpoczyna grę np. papier-kamień-nożyce, rzut monetą, rzut kostką. Wylosowany gracz ustawia przezroczysty guzik (znacznik) na wybranym przez siebie czynniku na pasku czynników. Drugi gracz kładzie znacznik na wybranym przez siebie czynniku i zakrywa pionkiem w tabeli liczbę, która jest iloczynem obu czynników. Następnie pierwszy gracz przesuwa jeden ze znaczników i zakrywa w tabeli liczbę, która jest iloczynem obecnie wskazanych czynników i tak na przemian. Na każdym polu może być ustawiony tylko jeden pionek. Na pasku czynników można ustawić dwa znaczniki na jednym polu. Grę wygrywa ten z graczy, któremu uda się jako pierwszemu zakryć cztery kolejne pola w pionie lub poziomie.



Poniżej dwie wersje planszy do gry na różnym poziomie zaawansowania:

Ilustracja 18 Plansze do gry: Cztery iloczyny w linii

Cztery iloczyny w linii

☺	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14	15
16	18	20	22	21	24	25	26
27	28	30	32	33	35	36	39
40	42	44	45	48	49	52	54
55	56	60	63	64	65	66	72
77	78	81	84	88	91	96	99
104	108	117	121	132	144	156	169

Pasek czynników

1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Cztery iloczyny w linii

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

Pasek czynników

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Źródło: opracowanie własne

Po przeprowadzeniu rozgrywki czwartoklasiści powinni wyciągnąć wniosek, że aby wygrać, konieczna jest bardzo dobra znajomość tabliczki mnożenia (nie tylko tej w zakresie 100), która umożliwia przewidywanie ruchów przeciwnika. Kolejne partie gry proponuję przeprowadzać w nowych duetach na następnych lekcjach, aby dać czwartoklasistom czas na wspólne doskonalenie umiejętności mnożenia.



3.2.3 Zgadnij ile [modyfikacja za Candlers, L.]

Liczba uczestników: 2 drużyny

Wiek: od klasy IV

Pomoce: tablica i pisaki

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

- uczniowie mnożą i dzielą liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym lub w pamięci.

Zasady gry:

Klasę należy podzielić na dwie drużyny. Do tablicy podchodzi dwoje uczniów, po jednym reprezentancie z drużyny i staje plecami do siebie. Na trzy cztery piszą wybraną liczbę ze zbioru $\{2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15\}$ tak, żeby przeciwnik i klasa jej nie widzieli. Nauczyciel mówi: Iloczyn waszych liczb wynosi...

Jaką liczbę podał przeciwnik? Uczniowie mogą liczyć w pamięci lub pisemnie.

Wygrywa ta osoba z dwójki, która pierwsza poda liczbę przeciwnika. Nauczyciel prosi pozostałych uczniów o sprawdzenie wyniku działania. Jeżeli jest wykonane poprawnie przydziela punkt zwycięskiej drużynie. Później zaprasza następne dwie osoby, itd. Wygrywa drużyna, która otrzymała najwięcej punktów.

Grę można modyfikować zmieniając np. działanie na dodawanie. Uczniowie wybierają liczbę z zakresu 101 – 999, nauczyciel podaje sumę liczb, a uczniowie muszą wykonać np. działanie pisemne, żeby podać liczbę przeciwnika.

Niewątpliwą korzyścią z tej gry, oprócz doskonalenia umiejętności rachunkowych i odporności na stres, jest ćwiczenie kompetencji społecznych. Uczniowie zauważają, że drużyna zbliża się do wygranej poprzez sukcesy pojedynczych osób, trzeba więc w zespole zadbać o to, by każdy uczeń sprawnie liczył.



3.2.4 Ułamki – więcej niż połowa

Liczba graczy: 2

Wiek graczy: od klasy IV

Pomoce: 8 kart do gry jednego koloru od asa do 8, dwie kredki w różnych kolorach, plansza do gry.

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie:

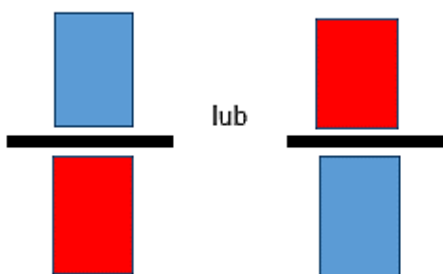
- opisują część danej całości za pomocą ułamka,
- skracają i rozszerzają ułamki zwykłe,
- przedstawiają ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej.

Zasady gry:

Każdej karcie odpowiada wartość liczbowa na niej zapisana. As ma wartość 1.

Młodsza osoba z pary zaczyna grę, losuje dwie karty do gry, ustawia z nich ułamek zwykły jak na rysunku poniżej.

Ilustracja 19 Schemat budowy ułamków do gry: Ułamki – więcej niż połowa



Źródło: opracowanie własne

Jeżeli wylosuje np. karty 4 i 7, to otrzymuje dwa ułamki: $\frac{4}{7}$ lub $\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$. Wybiera

jeden z nich i koloruje na planszy do gry (załącznik 3) odpowiadającą ułamkowi

część koła, czyli albo $\frac{4}{7}$ albo jedno całe i $\frac{3}{4}$ drugiego koła. Nie można jednak

wybrać ułamka, który po skróceniu daje liczbę całkowitą. Jeżeli grający wylosuje

karty as i 3, to otrzymuje ułamki: $\frac{1}{3}$ lub $\frac{3}{1} = 3$. W tym przypadku koloruje $\frac{1}{3}$.

Gracze losują karty, zapisują ułamki i kolorują na zmianę części kół do momentu, aż przy trzech kolejnych losowaniach kart, gracz nie ma możliwości



zakolorowania części ułamka na planszy. Uczniowie nawzajem sprawdzają poprawność zaznaczonych części koła. Przyjmujemy, że koło jest własnością gracza, jeżeli jest przez niego zakolorowane w części większej niż połowa.

Każdy z uczestników partii zaznacza swoje koła. Wygrywa ten, który jest posiadaczem największej liczby kół.

Rozgrywka zapoznaje ucznia ze standardową talią kart do gry (52 karty, 4 kolory, figury) oraz kształci umiejętność argumentowania dobrych wyborów.

Grę można modyfikować. Zamiast kart można rzucać dwa razy sześcienną lub inną kostką do gry. Jedna z wyrzuconych liczb staje się licznikiem, z druga mianownikiem ułamka. Można również też modyfikować planszę, zmienić np. kształt figur z koła na kwadrat.



3.2.5 Odliczanie

Liczba graczy: cała klasa

Wiek graczy: od klasy IV

Wersja 1:

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie rozpoznają liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności.

Zasady gry:

Uczniowie ustawiają się po okręgu. Nauczyciel informuje o zasadach gry:

Będziemy liczyć kolejno od 1 do 100. Od wybranego losowo ucznia zaczynamy kolejno odliczanie liczb naturalnych w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Kto powie liczbę pierwszą – siada. Każdy uczeń, który nie usiadł przedstawia kolegom uzasadnienie, dlaczego jego liczba nie jest pierwsza. Wygrywa ostatni stojący uczeń.

Wersja 2:

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie rozpoznają wielokrotności danej liczby.

Zasady gry:

Uczniowie ustawiają się po okręgu. Nauczyciel informuje o zasadach gry:

Będziemy liczyć kolejno od 1 do 100. Od wybranego losowo ucznia zaczynamy kolejno odliczanie liczb naturalnych w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Kto powie liczbę, która jest wielokrotnością liczby 6 lub w swoim zapisie zawiera cyfrę 6 siada. Każdy uczeń, który nie usiadł o tłumaczy swoją decyzję rówieśnikom. Wygrywa ostatni stojący uczeń.

Niewątpliwą korzyścią tej gry jest uczenie się (powtarzanie) własności liczb od kolegów, bo jak wynika z praktyki nastolatki chętniej słuchają uzasadnienia rówieśnika niż nauczyciela.



3.2.6 Gra planszowa – liczby całkowite i wymierne

Liczba graczy: 1 gracz na jednej planszy/cała klasa

Wiek graczy: od klasy V

Pomoce: 1 żeton, plansza do gry (załącznik 4), długopis

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie obliczają wartości wyrażeń arytmetycznych, wymagających stosowania działań arytmetycznych na liczbach całkowitych lub liczbach zapisanych za pomocą ułamków dziesiętnych.

Zasady gry:

Zadaniem gracza jest przejście i zaznaczenie drogi od STARTU do METY.

Uczeń ustawia żeton na polu START. Oblicza wartość wyrażenia arytmetycznego z tego pola. Odszukuje strzałkę, obok której zapisany jest wynik działania.

Jej zwrot wskazuje pole, na które przenosimy żeton. Oblicza teraz wartość wyrażenia z pola, na którym stoi pionek, odszukuje strzałkę itd. aż dojdzie do pola META.

W ostatnim polu uczeń wpisuje sumę otrzymanych wyników. Do wykonania działania służy ramka pod planszą do gry. Wygrywa uczestnik, który pierwszy dotrze do mety i poda poprawny wynik.

Po uzupełnieniu planszy do gry uczniowie w parach sprawdzają poprawność wykonanych obliczeń, przeprowadzają dyskusję kontrowersyjnych wyników i uczą się na błędach. Za poprawne wykonanie wszystkich obliczeń proponuję wystawić ocenę bardzo dobrą.

Niewątpliwą korzyścią tej gry jest łatwość modyfikacji i przygotowania kolejnej planszy. Można też przygotować plansze z działaniami dla uczniów o różnym stopniu zaawansowania albo zastosować do zadań innego typu np. zmiany jednostek czy obliczanie pól figur. Najłatwiej zmienić działanie – ułatwić lub utrudnić, dołożyć pierwiastki lub działania z tabliczki mnożenia. Plansza do gry Liczby całkowite i wymierne oraz czysta formatka do budowy gry znajdują się w załącznikach 4 i 5.



3.2.7 Bingo matematyczne – dodawanie jednomianów [Świercz, 2019]

Liczba graczy: 1 gracz na jednej planszy

Pomoce: puste plansze do gry w bingo 3×3 , zestaw zadań do gry

Wiek graczy: od klasy VII

Cele lekcji zgodnie z podstawą programową.

Uczniowie porządkują jednomiany i dodają jednomiany podobne.

Zasady gry:

1. Siódmoklasiści uzupełniają losowo puste plansze do gry liczbami, które poda nauczyciel. W poniższym przykładzie to będą:
 $10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2$.
2. Nauczyciel losuje jedno zadanie (przykład) z zestawu i wyświetla na tablicy.
3. Uczniowie rozwiązują zadanie, a następnie wyszukują i wykreślają na planszy liczbę, która jest rozwiązaniem zadania.
4. Pedagog losuje kolejne zadanie i powtarza procedurę do momentu, aż któryś z uczniów wykreśli z planszy wszystkie liczby w jednym wierszu, jednej kolumnie, albo przekątnej i zasygnalizuje wygraną mówiąc: BINGO!



Tabela 1

Przykładowe zadania:	Odpowiedzi
$-2y + (-8y)$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym y	-10
$12a + 20b - 21a$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym a	-9
$36x - 44x$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym x	-8
$-3x + 7y - 4x - 11y$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym x	-7
$x - 9x - 7x + 9x$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym x	-6
$21x - 4y - 17x - y$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym y	-5
$-a - 3a$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym a	-4
$9a - 13b + 14a + 10b$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym b	-3
$-35a + 33a$ współczynnik liczbowy stojący przy wyrażeniu zawierającym $[a]$	-2

Źródło: opracowanie własne na podstawie [Świercz, 2019]

Po sprawdzeniu poprawności obliczeń nauczyciel może ogłosić zwycięzcę. Proponuję, aby zwycięzca przedstawił na tablicy i wytłumaczył rozwiązanie wykreślonych przykładów. Warto też zapytać nastolatki, czy na wygraną ma wpływ tylko tempo i poprawność liczenia. Powinni zauważyć, że wygrana jest losowa, zależy od ustawienia liczb w kwadracie. Po rozwiązaniu można przeprowadzić rozgrywkę kolejny raz.

Grę można modyfikować i ułożyć, jak autorka, proste zadania do każdego prawie działu, czy wybrać większą planszę np. 4×4 lub 5×5 . Rozgrywka Bingo urozmaici zadania nudne z punktu widzenia ucznia, a niezbędne na dalszym etapie edukacji. Jest dobrym pomysłem na podsumowanie lekcji lub niespodziewane zastępstwo.



3.2.8 Gry planszowe dostępne na rynku

Pisząc o wykorzystaniu gier na matematyce trzeba wspomnieć o „planszówkach” dostępnych na rynku, które przeżywają ostatnio swój renesans. Ćwiczą one nie tylko umiejętności matematyczne, ale także kompetencje międzyprzedmiotowe i społeczne. Uczą logicznego myślenia, konsekwencji, kojarzenia faktów, przewidywania kroków przeciwnika oraz budowania strategii. Są sposobem na oderwanie dzieci od ekranu smartfona, czy komputera. Kształcą umiejętności komunikacyjne, zachęcają do wspólnego spędzania czasu. Pokazują, jak przegrywać. Powinny znaleźć się w bibliotece i świetlicy szkolnej, są dobrym pomysłem na nagrody w konkursach. Popołudnia z planszówkami są świetnym sposobem na integrację uczniów z różnych środowisk.

Ilustracja 20 Plansza po rozegraniu gry: *Wilk i owce*



Źródło: archiwum własne

Wilki i owce

Polska wersja gry strategicznej Philippe des Pallieres przeznaczona dla dwóch – czterech osób od 7 lat. Czas trwania jednej rozgrywki to około 30 minut. Gra ćwiczy rozumienie pola wielokąta i umiejętności rachunkowe. Kształci umiejętność przewidywania działań przeciwnika i budowania strategii.



Uczestnicy gry są pasterzami, którzy budują z kafelków ogrodzone pastwiska dla swoich owiec. Wygrywa uczestnik, którego ogrodzone pastwisko mieści najwięcej owiec (ma największe pole). Gra została nominowana do polskiej Gry Roku 2007.

Ilustracja 21 Plansza do gry: *Osadnicy z Catanu*



Źródło: archiwum własne

Osadnicy z Catanu [Settlers of Catan]

Jest to polska wersja gry Klausa Teubera przeznaczona dla trzech – czterech osób ucząca w zrozumiały sposób podstawowych zasad ekonomii

i prawdopodobieństwa. Czas trwania jednej rozgrywki 45 – 60 minut.

Każdy z uczestników jest osadnikiem i zakłada swoją kolonię na nowoodkrytej wyspie Catan. Gracz musi zbudować strategię pozyskiwania i wymiany dóbr naturalnych: cegieł, zboża, owiec i drewna, które wykorzystuje do rozbudowy sieci dróg oraz nowych osiedli. Wszystko wykonując obliczenia arytmetyczne i szacując swoje możliwości. Wygrywa osoba, która jako pierwsza uzyska 10 punktów z wybudowanych przez siebie dróg, osiedli i kart specjalnych.

Gra została laureatem nagrody Gra Roku 2005 w Polsce.



Ilustracja 22 *Plansza do gry: Owczy pęd*



Źródło: archiwum własne

Owczy pęd

Polska wersja językowa gry strategicznej Gordona i Frasiera Lamontów, przeznaczona dla dwóch do czterech graczy od dziesiątego roku życia. Czas trwania jednej rozgrywki 45 – 60 minut. Gra składa się z czterech etapów. W pierwszym owieczki ustawiamy na pastwisku obok siebie i zliczamy punkty, w innym jak najbliżej barana Rogera, czy Czarnej Inez, albo jak najdalej od Szalonego Bodzia. Gra oprócz umiejętności arytmetycznych uczy planowania strategii. Uczestnik decyduje jaki wykona ruch wybierając odpowiednią kartę, ale musi przewidywać działania innych graczy. Czas każdego z etapów wyznacza znacznik na osi czasu przesuwany zgodnie z wynikami rzutów kostką. Wygrywa gracz z największą liczbą punktów zdobytych za dobrze ustawione owieczki. Magazyn „Games 100” przyznał jej tytuł Najlepszej Rodzinnej Gry Strategicznej 2008 roku!



PODSUMOWANIE

Każdy uczeń jest inny i wymaga innego sposobu uczenia się matematyki. Często potrzebuje pomocy nauczyciela w odnalezieniu drogi do samodzielnego zdobywania wiedzy, kształtowania umiejętności i postaw. Dobrze, gdy w podejmowaniu matematycznych wyzwań, otrzymuje wsparcie rówieśników, gdy uczy się matematyki poprzez współdziałanie, dyskutowanie, pytanie, obserwowanie, odkrywanie, konstruowanie i zabawę, bo najlepiej - uczyć się matematyki w grupie.

Powyższa publikacja nie wyczerpuje tematu uczenia się matematyki przez współpracę, eksperyment i gry, który jest obszerny i wielowątkowy. Ma dać nauczycielowi wskazówki metodyczno – dydaktyczne jak inspirować nastolatka do rozwijania kompetencji matematycznych 

Załącznik 1 Scenariusz zajęć: Ludolfina**Temat: Ludolfina (potem można dodać: Liczba π i obwód koła)**

	Wiedza	Umiejętności	Postawy
Cele lekcji ze wskazaniem elementów kształtowanych kompetencji:	Uczeń: - zna pojęcia koło, średnica, obwód, - zna symbol i przybliżoną wartość liczby π, - zna związek między obwodem koła, a jego promieniem.	Uczeń: - poprawnie dokonuje pomiarów długości odcinka i obwodu koła oraz wyznacza przybliżoną wartość liczby π, - oblicza obwód koła o danej średnicy, promieniu, - oblicza długość promienia koła/średnicy mając dany obwód koła.	Uczeń: - współpracuje w grupie, - wykazuje się cierpliwością i dokładnością w wykonywaniu pomiarów, - dokonuje krytycznej analizy wyników doświadczenia, wyciąga wnioski.
Cele sformułowane w języku zrozumiałym dla ucznia:	Uczniu po tej lekcji: - potrafisz podać przybliżoną wartość liczby π, - znasz związek między obwodem, a promieniem/średnicą koła.	Uczniu po tej lekcji: - umiesz dokonywać pomiarów średnicy i obwodu koła w różny sposób, - potrafisz obliczyć obwód koła o podanym promieniu/średnicy, -umiesz obliczyć długość promienia koła/średnicy mając dany obwód koła, -potrafisz obliczyć obwody okrągłych przedmiotów talerza, szklanki, okrągłej serwety, aby np. wiedzieć ile metrów koronki kupić do obszycia brzegu.	Uczniu po tej lekcji: - pokażesz, że umiesz pracować w zespole i dokonywać analizy wyników doświadczenia.

Przebieg lekcji (zastosowane metody, formy pracy):

- I. Czynności wstępne.
- II. Podział uczniów na grupy 2-3 osobowe.
- III. Pytanie problemowe: Czy obwód koła zależy od długości średnicy?

Obrus babci Janiny ma kształt koła o średnicy 2m. Kasia postanowiła zrobić babci prezent i obszyć jego brzeg bawełnianą koronką. Ile metrów koronki powinna kupić? Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.

- IV. Przeprowadzenie w grupach doświadczenia:

Materiały i narzędzia:

Okrągłe przedmioty, linijka, ekierki, nitka, paski papierowe, ołówek, cienkopis, suwmiarka, tabela pomiarów, kalkulator prosty lub telefon komórkowy.

Instrukcja:

1. Wybierz jeden z okrągłych przedmiotów.
2. Wykorzystując dostępne materiały zmierz jak najdokładniej średnicę, a następnie obwód koła.
3. Powtórz pomiar trzykrotnie.
4. Zapisz wyniki na karcie pomiarów.
5. Wykorzystując kalkulator/arkusz Excel/telefon obliczcie ilorazy długości średnicy przez obwód i wpiszcie wyniki do tabeli pomiarów.
6. Wybierz kolejne 3 przedmioty i wykonaj punkty 1-5.

Tabela pomiarów			
Przedmiot	I obwód koła w cm	2r długość średnicy w cm	stosunek długości obwodu do średnicy tzn. $l:2r$

7. Wyciągnij wnioski i zapisz spostrzeżenia grupy (analiza-wnioskowanie).

V. Weryfikacja wniosków i przykłady zastosowań (cała klasa, pogadanka)

Uczniowie podają przykłady zastosowań liczby π np. do obliczenia obwodu koła, do obliczenia długości drogi, którą pokonałem na rowerze, do obliczenia liczby obrotów koła na trasie 100km, do obliczenia prędkości samochodu.

- VI. Krótka prezentacja ucznia Power Point nt. historii liczby π i jej śladów w literaturze(cała klasa, elementy wykładu).
- VII. Podsumowanie – rozwiązanie problemu (praca indywidualna, może być też online np. quizlet).

Zad. 1

Obrus babci Janiny ma kształt koła o średnicy 2m. Kasia postanowiła zrobić babci prezent i ozdobić jego brzeg bawełnianą koronką. Ile metrów koronki powinna kupić? Wynik podaj z dokładnością do 1cm.

Zad. 2

Wybierz odpowiedź P, jeżeli zdanie jest prawdziwe lub F, jeżeli jest fałszywe.

Tabela 2

Liczba π ma wartość ok. 3,14	P	F
Kasia powinna kupić więcej niż 6m koronki	P	F
Aby obliczyć obwód koła wystarczy zmierzyć jego średnicę i pomnożyć ją przez liczbę π	P	F
Jeżeli promień koła ma długość 10cm, to jego obwód jest równy 31,4cm	P	F

VIII. Przekazanie informacji zwrotnej - metoda ręki.

Źródło: opracowanie własne

Załącznik 2 Karty do gry w Bank w Biglandii

LOKATA 1 ROK	Klik Bank stopa procentowa: 26% kwota do 39 000 bigmonet	LOKATA 1 ROK	Big Bank stopa procentowa: 32% kwota powyżej 45 000 bigmonet	LOKATA 1 ROK	Mig Bank stopa procentowa: 20% kwota do 42 000 bigmonet
LOKATA 1 ROK	Klik Bank stopa procentowa: 28% kwota powyżej 39 000 bigmonet	LOKATA 1 ROK	Big Bank stopa procentowa: 22% kwota do 45 000 bigmonet	LOKATA 1 ROK	Mig Bank stopa procentowa: 30% kwota powyżej 42 000 bigmonet
LOKATA 6 MIESIĘCY	Klik Bank stopa procentowa: 10% kwota do 35 000 bigmonet	LOKATA 6 MIESIĘCY	Big Bank stopa procentowa: 10% kwota powyżej 13 000 bigmonet	LOKATA 6 MIESIĘCY	Mig Bank stopa procentowa: 8% kwota do 26 000 bigmonet
LOKATA 6 MIESIĘCY	Klik Bank stopa procentowa: 14% kwota powyżej 35 000 bigmonet	LOKATA 6 MIESIĘCY	Big Bank stopa procentowa: 6% kwota do 13 000 bigmonet	LOKATA 6 MIESIĘCY	Mig Bank stopa procentowa: 12% kwota powyżej 26 000 bigmonet
LOKATA 3 MIESIĄCE	Klik Bank stopa procentowa: 4% kwota do 25 000 bigmonet	LOKATA 3 MIESIĄCE	Big Bank stopa procentowa: 4% kwota powyżej 12 000 bigmonet	LOKATA 3 MIESIĄCE	Mig Bank stopa procentowa: 3% kwota do 25 000 bigmonet
LOKATA 3 MIESIĄCE	Klik Bank stopa procentowa: 6% kwota powyżej 25 000 bigmonet	LOKATA 3 MIESIĄCE	Big Bank stopa procentowa: 2% kwoty do 12 000 bigmonet	LOKATA 3 MIESIĄCE	Mig Bank stopa procentowa: 5% kwota powyżej 25 000 bigmonet

Można podzielić pieniądze i korzystać jednocześnie z ofert kilku banków.	LOKATA 1 ROK Big Bank Bigmonety pozostają w Big Banku przez rok kapitalizacja po roku	LOKATA 3 MIESIĄCE Mig Bank Bigmonety pozostają w Mig Banku przez kwartał kapitalizacja kwartalna
Kapitalizacja kwartalna oznacza dopisywanie odsetek co kwartał, roczna – raz na rok.	Bigmoneta jest jednostką monetarną w Biglandii.	Zwycięzca zostanie Ministrem Finansów Biglandii.
Rok ma cztery kwartały.	Król Biglandii dał Wam do dyspozycji 32 000 bigmonet.	Po upływie terminu lokaty można zmienić bank.
Nie wolno podejmować pieniędzy przed zakończeniem lokaty.	Lokując pieniądze możecie zarobić więcej lub mniej w zależności od banku.	Po trzech latach musicie oddać 32 000 bigmonet, reszta należy do Was.
Wszystkie oferty banków zostały zapisane na kartach.	Po upływie terminu lokaty można przenieść pieniądze wraz z odsetkami na inną lokatę.	Pieniądze zostały Wam powierzone na trzy lata.
BANK w Biglandii	Inwestować możecie także uzyskane odsetki.	Czy wiecie jak najlepiej wykorzystać oferty banków?

BANK

Biglandia – niewielkie królestwo położone na granicy światów, brak dostępu do morza, brak naturalnych zasobów, wszędzie daleko, słabo rozbudowana sieć komunikacyjna, ustrój – monarchia dziedziczna, jednostka monetarna – bigmoneta (1 bgm = 0,987 pln). Stolica państwa Biggoszcz położona w środkowej części królestwa, mało zaludniona, brak zabytków, w centrum miasta trzy duże nowoczesne banki: **Big Bank, Klik Bank i Mig Bank**. Głównym źródłem dochodu Biglandii są odnawialne źródła energii, rolnictwo ekologiczne i inwestycje kapitałowe. Z powodu oszczędności finansowych król BigMak sam kieruje rządem, jednak nie zna się na inwestycjach i poszukuje osoby odpowiedniej na stanowisko szefa resortu finansów.

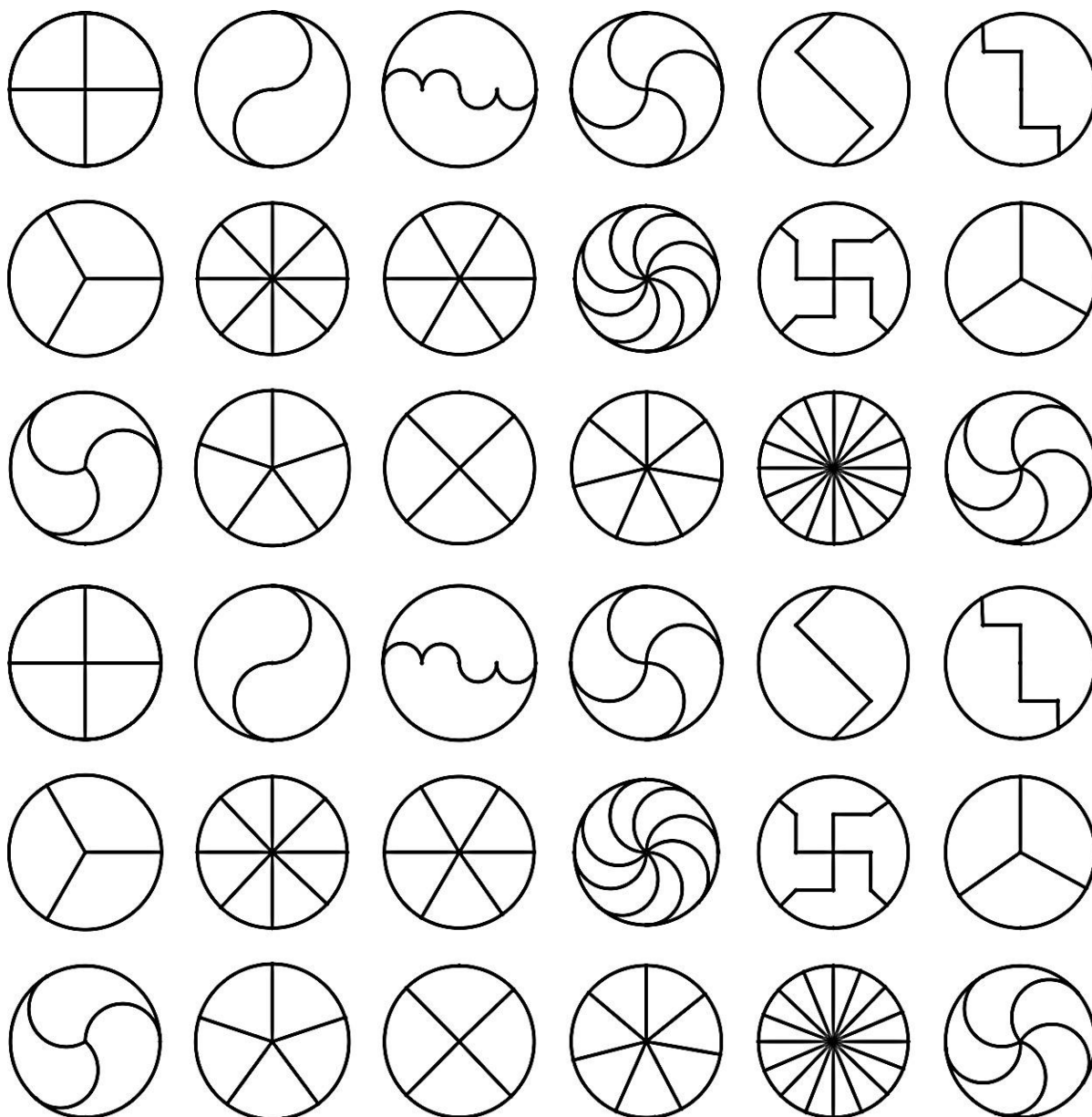
www.bigpedia.com [dostęp 1.05.2021]

Zasady oferty w skrócie:

Jednostką monetarną w Biglandii jest bigmoneta. Król BigMak daje do dyspozycji 32 000 bigmonet. Po trzech latach trzeba oddać 32 000 bigmonet, reszta należy do Was. Zwycięzca zostanie Ministrem Finansów Biglandii. Wszystkie oferty banków zostały zapisane na kartach. Można podzielić pieniądze i korzystać jednocześnie z ofert kilku banków. Nie wolno podejmować pieniędzy przed zakończeniem lokaty. Inwestować można także uzyskane odsetki. Kapitalizacja kwartalna oznacza dopisywanie odsetek co kwartał, roczna – raz na rok. Po upływie terminu lokaty można przenieść pieniądze wraz z odsetkami na inną lokatę oraz zmienić bank.

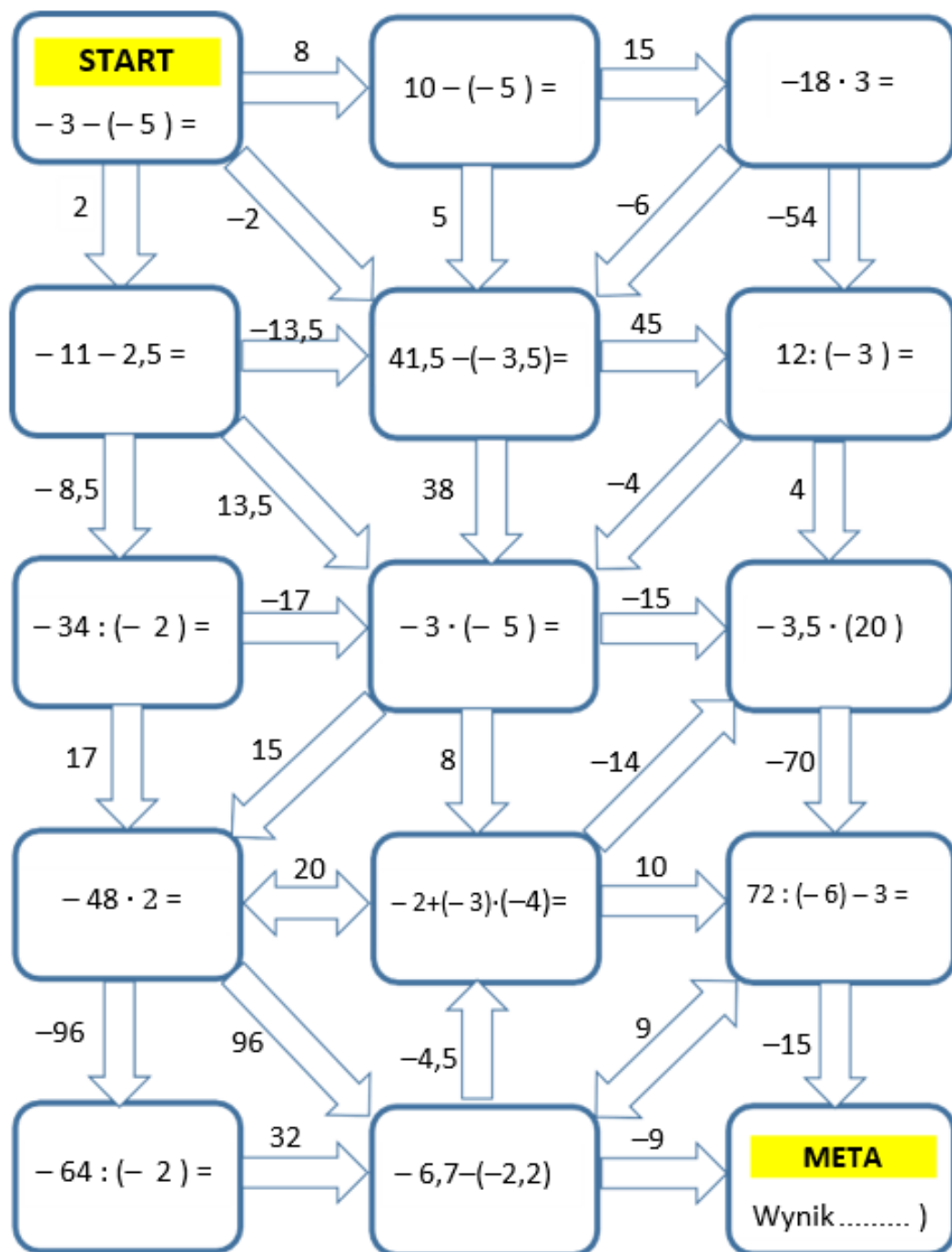
Powodzenia 😊

Źródło: opracowanie własne



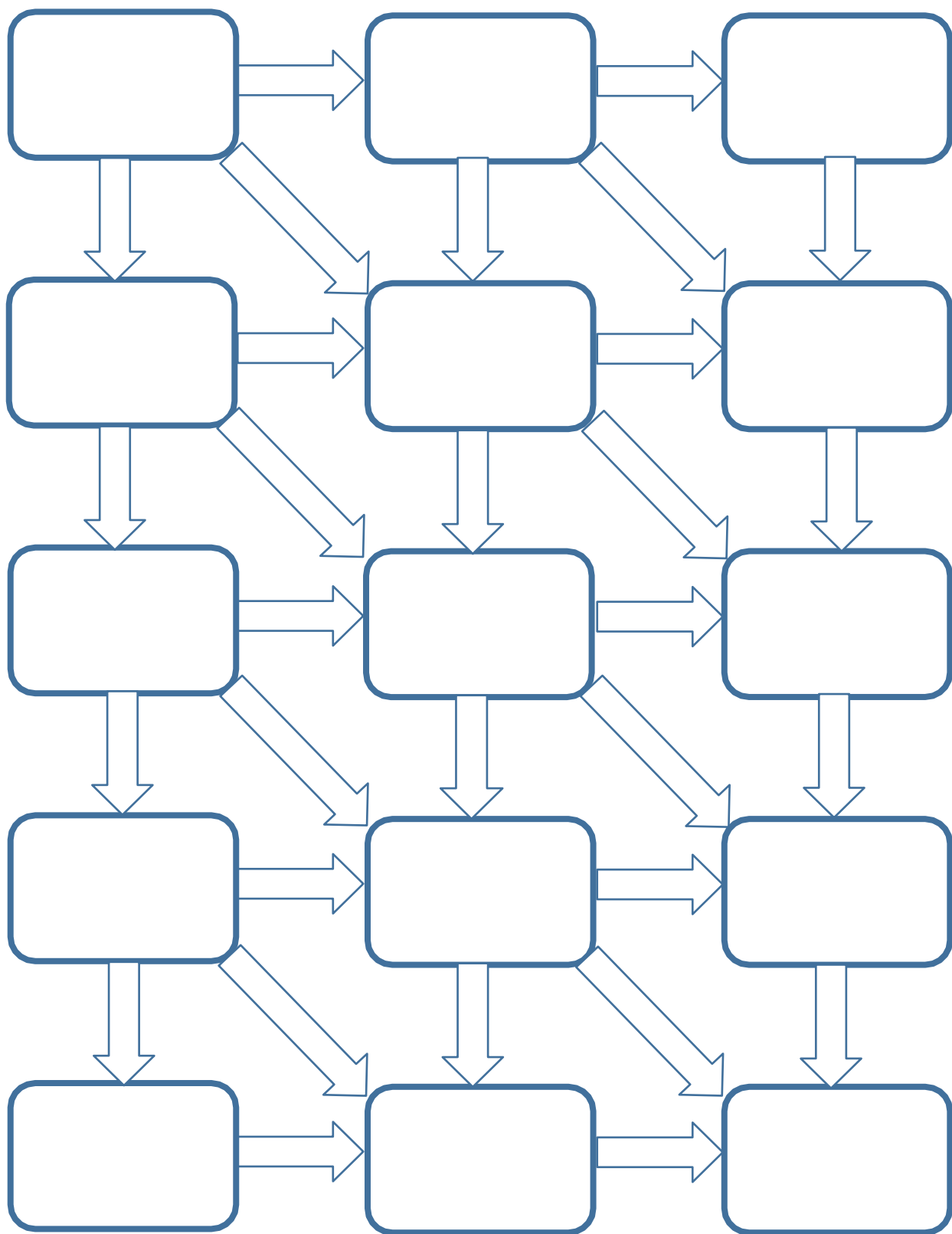
Gracz I		Gracz II	
Kolor		Kolor	
Wylosowane ułamki		Wylosowane ułamki	
Liczba kół gracza I zakolorowanych większej części		Liczba kół gracza II zakolorowanych większej części	

Źródło: opracowanie własne



Zapisz w ramce poniżej sumę wyników wszystkich działań i wpisz wynik w polu META

Źródło: opracowanie własne



Źródło: opracowanie własne



BIBLIOGRAFIA Z UWZGLĘDNIENIEM NETOGRAFII

1. Ptaszek, G., Bigaj, M., Dębski, M., Pyżalski, J. & Stunża, G. D., 2020, Zdalna edukacja - gdzie byliśmy, dokąd idziemy? Wstępne wyniki badania naukowego „Zdalne nauczanie a adaptacja do warunków społecznych w czasie epidemii koronawirusa” [online], Warszawa 2020, [dostęp 26.05.21]
2. Podstawa programowa kształcenia ogólnego z komentarzem. Szkoła podstawowa, matematyka, pdf. , 2017, MEN, ORE,
3. Hattie, J. A. C., Fisher, D., Frey, N. i in., 2017, Visible learning for mathematics. What Works Best to Optimize Student Learning. Grades K-12, Corvin, USA
4. Hattie, J. A. C. 2008, Visible learning. A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement, London, Routledge
5. Koszewska K., 2018, Co to są kompetencje społeczne?
https://www.mscdn.pl/mscdn2018/images/pdf/Dobre_praktyki/730_art.pdf
[dostęp 29.07.21]
6. Sterna, D., 2014, Uczę(się) w szkole, CEO
7. Kierstein, Z., 2006, Aktywne metody w kształceniu matematycznym, Wydawnictwo Nowik, Opole
8. Karpiński, M., Dobrowolska, M., Braun, M., Lech, J., 2002, Matematyka I, podręcznik dla liceum i technikum zakres podstawowy z rozszerzeniem, GWO, Gdańsk
9. Dąbrowski, M., 2020, Matematyczne eksperymenty. Geometria nie tylko dla klas I-III, Wydawnictwo Nowik,
10. Dąbrowski, M., 2015, Do czego służą gry, <http://edukacjananowo.pl/do-czego-sluza-gry/> [dostęp 24.05.21]
11. Świercz, J., 2019, Bingo matematyczne. Gry matematyczne dla uczniów klas VII- VIII szkoły podstawowej, Wydawnictwo Nowik,
12. Świercz, J., Nowik, J., 2016, Jak wykorzystać kostki na lekcjach matematyki, Wydawnictwo Nowik
13. Mason, J., Burton, L., Stacy, K., 2005, Matematyczne myślenie, WSiP
14. Kapica, G., 1991, Rozrywki umysłowe w nauczaniu początkowym, WSiP, Warszawa
15. Vasta R., Haith M.M., Miller S.A., 1995, *Psychologia dziecka*, WSiP, Warszawa
16. National Council of Teachers of Mathematica, THE PRODUCT GAME, 2008
<https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Product-Game/> , [dostęp 24.05.21]
17. Candler, L., 5 Math Games Every Classroom Needs to Play
<https://www.lauracandler.com/5-math-games-every-classroom-needs/>
[dostęp 27.05.21]



18. Ciężka, B., 2019, „Dziecięce” metody ewaluacji[online]. Dostępny w:
<https://epale.ec.europa.eu/pl/blog/dzieciece-metody-ewaluacji-uzyteczne-rowniez-wsrod-doroslych>, [dostęp 22.05.21]
19. Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej C189, zalecenia Rady w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie, 2018 [online]
<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/PL/TXT/PDF/?uri=OJ:C:2018:189:FULL&from=DE> [dostęp 9. 06.21]
20. Ryżak, B., Cykl Kolba – czym jest i jak go stosować?, <https://humanly.pl/cykl-kolba/> [dostęp 9.06.21]
21. Idziak, G., 2019, „Uczenie się przez doświadczenie – cykl Kolba”,
<https://perceptiedukacja.pl/uczenie-sie-przez-doswiadczenie-cykl-kolba/> [dostęp 9.06.21]
22. Andrzejewski, M., 2014, Cykl Kolba czyli jak uczyć się i zapamiętać na całe życie?, <http://www.marketingowa-moc.pl/cykl-kolba/> [dostęp 9.06.21]
23. Teuber, K. Osadnicy z Catanu, Galakta,
https://aleplanszowki.pl/rodzinne/510-catan-osadnicy-z-catanu.html?search_query=Catan&results=32 [dostęp 11.06.21]
24. Pallieres, P., Wilk i owce, Granna <https://dicelandblog.pl/recenzja-2-wilki-owce/>, [dostęp 11.06.21]
25. Lamont, G., Lamont, F., Owczy pęd, Egmont, za
<https://www.planszomania.pl/rodzinne/927/Owczy-Ped.html>, [dostęp 11.06.21]

Ilustracje:

<https://pixabay.com/pl/vectors/walizka-torba-baga%C5%BC-przypadku-40175/>
<https://pixabay.com/pl/vectors/kosza-pojemnik-na-%C5%9Bmieci-23653/>
<https://pixabay.com/pl/vectors/ceny-torba-brown-lina-worek-308815/>



WYKAZ ZAŁĄCZNIKÓW

Załącznik 1 Scenariusz  ięć: Ludolfina.....	57
Załącznik 2 Karty do gry  Bank w Biglandii.....	61
Załącznik 3 Plansza do gry: UŁAMKI – więcej niż połowa	64
Załącznik 4 Plansza do gry: LICZBY CAŁKOWITE I WYMIERNE	65
Załącznik 5 Czysta plansza do gry: Liczby całkowite i wymierne	66

WYKAZ TABEL

Tabela 1.....	52
Tabela 2.....	60



WYKAZ ILUSTRACJI

Ilustracja 1 <i>Informacja zwrotna – tarcza strzelnicza</i>	12
Ilustracja 2 <i>Informacja zwrotna – ręka</i>	13
Ilustracja 3 <i>Informacja zwrotna – walizka, kosz, worek</i>	15
Ilustracja 4 <i>Grupy macierzyste</i>	17
Ilustracja 5 <i>Grupy eksperckie</i>	18
Ilustracja 6 <i>Grupy macierzyste</i>	18
Ilustracja 7 <i>Ilustracja do zadania 5</i>	22
Ilustracja 8 <i>Cykl Kolba</i>	25
Ilustracja 9 <i>Siatka ostrosłupa</i>	25
Ilustracja 10 <i>Tabela pomiarów</i>	28
Ilustracja 11 <i>Koło wpisane w kwadrat</i>	29
Ilustracja 12 <i>Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta cz. 1</i>	30
Ilustracja 13 <i>Wyznaczanie środka ciężkości trójkąta cz. 2</i>	30
Ilustracja 14 <i>Symetrie w przyrodzie</i>	32
Ilustracja 15 <i>Siatka: Diamonds with Full Grid</i>	34
Ilustracja 16 <i>Zadanie 12 arkusz ósmoklasisty z matematyki 2020</i>	35
Ilustracja 17 <i>Schemat do zadania: szukanie regularności</i>	36
Ilustracja 18 <i>Plansze do gry: Cztery iloczyny w linii</i>	45
Ilustracja 19 <i>Schemat budowy ułamków do gry: Ułamki – więcej niż połowa</i>	47
Ilustracja 20 <i>Plansza po rozegraniu gry: Wilk i owce</i>	53
Ilustracja 21 <i>Plansza do gry: Osadnicy z Catanu</i>	54
Ilustracja 22 <i>Plansza do gry: Owczy pęd</i>	55